FEUILLE D'EXERCICES N°13

STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

EXERCICE TD13.1 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR R)
L'ensemble $\mathbf{R}$ muni de la multiplication usuelle est-il un groupe ?

EXERCICE TD13.2 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR R)
L'ensemble $\mathbf{R}$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = |x+y|$ est-il un groupe ?

EXERCICE TD13.3 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR R)
L'ensemble $\mathbf{R}$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = \max\{x,y\}$ est-il un groupe ?

EXERCICE TD13.4 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR R)
L'ensemble $\mathbf{R}$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = x + y - xy$ est-il un groupe ?

EXERCICE TD13.5 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR R)
Soit n un nombre entier naturel impair. L'ensemble $\mathbf{R}$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ est-il un groupe ?

EXERCICE TD13.6 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$)
L'ensemble $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R})^2$, $(x_1,y_1) * (x_2,y_2) = \left(x_1 x_2, \dfrac{y_1}{x_2} + x_1 y_2\right)$ est-il un groupe ? La loi $*$ est-elle commutative ?

EXERCICE TD13.7 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR $\mathbf{R}^2$)
L'ensemble $\mathbf{R}^2$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \left(\mathbf{R}^2\right)^2$, $(x_1,y_1) * (x_2,y_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 e^{x_2} + y_2 e^{-x_1}\right)$ est-il un groupe ? La loi $*$ est-elle commutative ?

EXERCICE TD13.8 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR C)
L'ensemble $\mathbf{C}$ de la loi de composition interne définie par, pour tout $(z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2$

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$$

est-il un groupe ? La loi $*$ est-elle commutative ?

EXERCICE TD13.9 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES ÉLÉMENTS INVERSIBLES)
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ associative et admettant un neutre. On note $S(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de E pour la loi $*$. Démontrer que $(S(E),*)$ est un groupe.

EXERCICE TD13.10 (GROUPE DONT TOUS LES CARRÉS VALENT LE NEUTRE)
Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre noté e tel que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Démontrer que G est abélien.

EXERCICE TD13.11 (TABLE DU GROUPE À CINQ ÉLÉMENTS)
Ici e, a, b, c, d désignent cinq éléments distincts. Compléter la table suivante pour obtenir une loi de groupe sur $\{e, a, b, c, d\}$.

$*$	e	a	b	c	d
e					
a		b			
b	b				
c		e			
d					

EXERCICE TD13.12 (TRANSPORT D'UNE LOI DE GROUPE)
Soient $(G_1, *_1)$, G_2 un ensemble et $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ une bijection. On pose, pour tout $(x_2, y_2) \in G_2^2$

$$x_2 *_2 y_2 := f\left(f^{-1}(x_2) *_1 f^{-1}(y_2)\right) .$$

Démontrer que $(G_2, *_2)$ est un groupe. Que dire de f ?

EXERCICE TD13.13 (CENTRE D'UN GROUPE)
Soit $(G,*)$ un groupe. Le centre de G, noté $Z(G)$ est formé des éléments de G qui commutent avec tous les autres, i.e.

$$Z(G) := \left\{x \in G \,:\, \forall\, y \in G \quad x * y = y * x\right\} .$$

Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

EXERCICE TD13.14 (UNION D'UNE FAMILLE FILTRANTE DE SOUS-GROUPES)
Soient $(G,*)$ un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de $(G,*)$ telle que pour tout $(i,j) \in I^2$ il existe $k \in I$ vérifiant $H_i \subset H_k$ et $H_j \subset H_k$. Démontrer que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

EXERCICE TD13.15 (SOMME DIRECTE DE SOUS-GROUPES)
Soient $(G,*)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et H_1, H_2 deux sous-groupes de $(G,*)$. On pose

$$H_1 * H_2 := \{h_1 * h_2 \,:\, (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2\} .$$

On suppose que tout élément de H_1 commute avec tout élément de H_2.
1) Démontrer que $H_1 * H_2$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
2) On suppose que $H_1 * H_2 = G$ et on introduit les deux assertions suivantes

$$P_1 \,:\, « H_1 \cap H_2 = \{e\} » \qquad \text{et} \qquad P_2 \,:\, « \forall\, g \in G \quad \exists!(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2 \quad g = h_1 * h_2 » .$$

Démontrer que P_1 et P_2 sont équivalentes.

Exercice TD13.16 (groupe diédral et réalisation géométrique)
Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et les applications

$$r \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z\,e^{i\frac{2\pi}{n}} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad s \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z}\,. \end{array} \right.$$

1) Interpréter géométriquement r et s.
2) Calculer r^n, s^2 et démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $r^k \circ s = s \circ r^{-k}$.
3) Démontrer que $D := \left\{ r^k \circ s^\ell \ : \ (k,\ell) \in \mathbf{Z}^2 \right\}$ est un sous-groupe de $(S_{\mathbf{C}}, \circ)$.

Exercice TD13.17 (théorème de Lagrange)
Soit $(G,*)$ un groupe fini dont l'élément neutre est noté e et H un sous-groupe de $(G,*)$. On se propose de démontrer que $\operatorname{card}(H)$ divise $\operatorname{card}(G)$ (théorème de Lagrange).
1) Démontrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur G par, pour tout $(g_1,g_2) \in G^2$

$$g_1 \,\mathscr{R}\, g_2 \text{ si et seulement si } g_1 \ * \ g_2^{-1} \ \in \ H$$

est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence $\overline{e}$ de e.
2) Démontrer que toutes les classes d'équivalences ont le même cardinal.
3) On note k le nombre de classes d'équivalence. Démontrer que $\operatorname{card}(G) = k \operatorname{card}(H)$.

Exercice TD13.18 (ordre d'un élément d'un groupe fini)
Soient $(G,*)$ un groupe fini de cardinal n dont l'élément neutre est noté e et $g \in G$.
1) Justifier que $m = \min\left\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ g^k = e\right\}$ existe.
2) Démontrer que $< g > := \left\{ g^k \ : \ k \in [\![0, m-1]\!] \right\}$ est le plus petit sous-groupe de $(G,*)$ contenant g, puis à l'aide du théorème de Lagrange que m divise n.
3) Démontrer que $g^n = e$.
4) Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer que le seul sous-groupe fini de $(\mathbf{C}^*, \times)$ de cardinal n est $\mathbf{U}_n$.

Exercice TD13.19 (groupe ordonné)
Soient $(G,+)$ un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0 et $\leqslant$ une relation d'ordre sur G compatible avec la loi $+$, i.e. que pour tout triplet $(g_1,g_2,g_3) \in G^3$

$$g_1 \leqslant g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 + g_3 \leqslant g_2 + g_3\,.$$

On pose $G_+ := \left\{ g \in G \ : \ g \geqslant 0 \right\}$ et $G_- := \left\{ g \in G \ : \ g \leqslant 0 \right\}$.
1) Démontrer G_+ est stable pour la loi $+$.
2) Démontrer que $\left\{ -g \ : \ g \in G_+ \right\} = G_-$.
3) Démontrer que $G_+ \cap G_- = \{0\}$.
4) Démontrer que l'ordre $\leqslant$ est total sur G si et seulement si $G_+ \cup G_- = G$.

Exercice TD13.20 (nilpotence)
Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Un élément $a \in A$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a^n = 0_A$.
1) Soit $(a,b) \in A^2$ tel que ab est nilpotent. Démontrer ba est également nilpotent.
2) Soient a et b deux éléments nilpotents de A tels que $ab = ba$. Démontrer que $a+b$ est nilpotent.

Exercice TD13.21 (Unités de l'anneau des entiers de Gauss)

On pose $\mathbf{Z}[i] := \left\{a+ib \,:\, (a,b)\in\mathbf{Z}^2\right\}$.

1) Démontrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbf{C},+,\times)$.
2) Démontrer qu'un élément $z\in\mathbf{Z}[i]$ est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$ si et seulement si $|z|=1$. En déduire $U(\mathbf{Z}[i])$.

Exercice TD13.22 (Un produit de corps n'est pas intègre)

Soient $(K_1,+_1,\times_1)$ et $(K_2,+_2,\times_2)$ deux corps. On définit deux lois de composition internes sur $K_1\times K_2$ par

$$+\left|\begin{array}{ccc}(K_1\times K_2)\times(K_1\times K_2) & \longrightarrow & K_1\times K_2\\ ((k_1,k_2),(k_1',k_2')) & \longmapsto & (k_1+_1k_1',k_2+_2k_2')\end{array}\right.\quad\text{et}\quad\times\left|\begin{array}{ccc}(K_1\times K_2)\times(K_1\times K_2) & \longrightarrow & K_1\times K_2\\ ((k_1,k_2),(k_1',k_2')) & \longmapsto & (k_1\times_1k_1',k_2\times_2k_2')\end{array}\right.$$

qui font de $(K_1\times K_2,+,\times)$ un anneau commutatif. Démontrer que $(K_1\times K_2,+,\times)$ n'est pas intègre.

Exercice TD13.23 (Idéal, radical et anneau euclidien)

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif intègre. Une partie I de A est un idéal de $(A,+,\times)$ si I est un sous-groupe de $(A,+)$ qui vérifie de plus

$$\forall\,(a,x)\in A\times I\quad ax\in I\qquad (I\text{ est absorbant}).$$

1) Soient I_1 et I_2 deux idéaux de $(A,+,\times)$. Démontrer que $I_1\cap I_2$,

$$I_1+I_2 := \{x_1+x_2 \,:\, (x_1,x_2)\in I_1\times I_2\}\qquad\text{et}\qquad I_1I_2 := \left\{\sum_{k=1}^{n}x_{1,k}x_{2,k} \,:\, n\in\mathbf{N}^*,\ \left(x_{1,k}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}\in I_1^n,\ \left(x_{2,k}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}\in I_2^n\right\}$$

sont des idéaux de $(A,+,\times)$.
2) Démontrer que si $(A,+,\times)$ est un corps alors ses seuls idéaux sont $\{0_A\}$ et A.
3) Soit $a\in A$. Démontrer que

$$aA := \{ab \,:\, b\in A\}$$

est un idéal de $(A,+,\times)$.
4) Soit I un idéal de A. Démontrer que son radical $\sqrt{I}$ défini par

$$\sqrt{I} := \left\{x\in A \,:\, \exists\,n\in\mathbf{N}^*\quad x^n\in I\right\}$$

est un idéal de $(A,+,\times)$.
5) On suppose dans cette question qu'il existe une application $v\colon\ A\setminus\{0_A\}\longrightarrow\mathbf{N}$ (appelée stathme euclidien) vérifiant les deux propriétés suivantes.
   (i) $\forall\,a\in A\quad\forall\,b\in A\setminus\{0_A\}\quad\exists\,(q,r)\in A^2\quad a=bq+r$ et ($r=0_A$ ou $v(r)<v(b)$)
   (ii) $\forall\,(a,b)\in(A\setminus\{0_A\})^2\quad v(b)\leqslant v(ab)$

Par exemple, la valeur absolue définit un stathme euclidien sur $(\mathbf{Z},+,\times)$ et le degré définit un stathme euclidien sur l'anneau des polynômes en une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{R}$. Démontrer que, pour tout idéal I de $(A,+,\times)$, il existe $x\in I$ tel que $I=xA$ (un tel élément x est appelé générateur de l'idéal I).
6) Soit un entier naturel $a\geqslant 2$ dont la décomposition en produit de facteurs premiers est

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$$

où $r\in\mathbf{N}^*$, $p_1,\dots,p_r$ sont des premiers distincts et $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ sont des entiers naturels non nuls. Déterminer un générateur de l'idéal $\sqrt{a\mathbf{Z}}$ de $(\mathbf{Z},+,\times)$.