Feuille d'exercices n°6

Petits systèmes linéaires

TD6.1. Exercice (formule de Cramer) Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$. On considère les systèmes linéaires :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array} \right. \qquad (S_0) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Soient (x_1, y_1) une solution de (S) et (x_0, y_0) une solution de (S_0). Démontrer que $(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ est solution de (S).
2. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux solutions de (S). Démontrer que $(x_1 - x_2, y_2 - y_1)$ est solution de (S_0).
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $x' := dx - by$ et $y' := -cx + ay$. Calculer $ax' + by'$ et $cx' + dy'$.
4. On suppose que (S) possède une unique solution, notée (x_1, y_1).
   (a) Démontrer que le système :
   $$(S_0) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \right.$$
   d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ possède une unique solution, que l'on précisera.
   (b) À l'aide de Q3, en déduire que $\delta := ad - bc \neq 0$.
5. On suppose que $\delta \neq 0$.
   (a) Démontrer que (S_0) possède une unique solution, que l'on précisera.
   (b) À l'aide de Q3, donner une solution (x_1, y_1) de (S).
   (c) Démontrer que (x_1, y_1) est l'unique solution de (S).
6. Donner une CNS portant sur a, b, c, d pour que le système (S) possède une unique solution.
7. Dans le cas où la condition énoncée en Q6 est satisfaite, exprimer l'unique solution de (S) en fonction de a, b, c, d, e, f.

TD6.2. Exercice Résoudre le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) x & + & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) y & = & 0 \\ \\ -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) x & + & \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) y & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

TD6.3. Exercice Résoudre le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & 11 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & -38 \\ x & + & 5y & - & 6z & = & 37 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

TD6.4. Exercice Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

TD6.5. EXERCICE On munit le plan d'un repère. Soient x_1, x_2, x_3 trois réels deux-à-deux distincts et y_1, y_2, y_3 trois réels. On note A_1, A_2, A_3 les points du plan de coordonnées respectives $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (a, b, c) de nombres réels tels que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array} \right.$$

passe par les points A_1, A_2, A_3.

TD6.6. EXERCICE On définit la fonction f par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+7x+1}{(x+1)(x+2)^2} \end{array} \right. .$$

Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$.

TD6.7. EXERCICE Résoudre le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & - & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

TD6.8. EXERCICE Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système :

$$(S_a) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 3 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11t & = & a \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

TD6.9. EXERCICE Résoudre le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 5z & = & -3 \\ -x & + & 2y & + & 7z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & 4z & = & 3 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

TD6.10. EXERCICE Soit $m \in \mathbb{C}$. Résoudre le système :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2 z & = & m \\ mx & - & m^2 y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3 z & = & -1 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

TD6.11. EXERCICE Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Résoudre le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & cz & = & 0 \\ cx & + & ay & + & bz & = & 0 \\ bx & + & cy & + & az & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. On pourra effectuer le changement de variable (à justifier) :

$$x' = x+y+z \qquad y' = x+jy+j^2 z \qquad z' = x+j^2 y+jz$$

où $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et distinguer plusieurs cas suivant les valeurs $P(1), P(j), P(j^2)$ où $P := a+bX+cX^2$.