Un corrigé du devoir Surveillé n°7

— **121 points** —

§ 1 Classe de similitude et trace (DB)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites <u>semblables</u> *s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$. Dans ce cas on note $A \sim B$.*

Q1 — 3 point(s) — Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $I_n A I_n^{-1} = I_n A I_n = A$, $A \sim A$. La relation $\sim$ est donc <u>réflexive</u>.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A \sim B$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Nous en déduisons que $A = P^{-1}BP$.

Comme la matrice P est inversible et $\left(P^{-1}\right)^{-1} = P$, $B \sim A$. La relation $\sim$ est donc <u>symétrique</u>.
- Soit $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^3$ telle que $A \sim B$ et $B \sim C$. Il existe donc $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $B = PAP^{-1}$ et $C = QBQ^{-1}$. Nous en déduisons $C = QPAP^{-1}Q^{-1}$. Comme $QP \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$, $A \sim C$. La relation $\sim$ est donc <u>transitive</u>.

Q2 — 1 point(s) — Que dire d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à I_n ?

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à I_n. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PI_nP^{-1}$. Nous en déduisons que $A = I_n$.
- Puisque la relation $\sim$ est réflexive, I_n est semblable à I_n.

Nous en déduisons que <u>la seule matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à I_n est I_n.</u>

Q3 — 3 point(s) — Soient A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les matrices A^r et B^r sont semblables.

Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Nous démontrons par récurrence que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $B^r = PA^rP^{-1}$, ce qui livrera le résultat demandé.
- *Initialisation à $r = 1$.* Nous observons que $PA^1P^{-1} = PAP^{-1} = B = B^1$.
- *Hérédité.* Soit $r \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $B^r = PA^rP^{-1}$. Alors $B^{r+1} = BB^r = PAP^{-1}PA^rP^{-1} = PAI_nA^rP^{-1} = PA^{r+1}P^{-1}$.

Soient les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ définies par $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4 — 4 point(s) — Calculer les matrices QA_1 et A_2Q.

$$QA_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A_2Q$$

Q5 — 4 point(s) — Démontrer que la matrice Q est inversible et calculer son inverse, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß sur une matrice augmentée et en expliquant le résultat à l'aide de matrices de transposition/dilatation/transvection.

Nous appliquons l'algorithme du pivot de Gauß à la matrice augmentée $(A \mid I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1}. & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \text{ ou bien } T_{3,1}(-1) \times \cdot$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -L_3 \text{ ou bien } D_3(-1) \times \cdot$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1}. & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \text{ ou bien } T_{1,3}(-1) \times \cdot \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \text{ ou bien } T_{2,3}(-1) \times \cdot \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1}. & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \text{ ou bien } T_{1,2}(-1) \times \cdot$$

Nous en déduisons que

$$T_{1,2}(-1)\,T_{2,3}(-1)\,T_{1,3}(-1)\,D_3(-1)\,T_{3,1}(-1)\,Q = I_3\,.$$

La matrice Q est inversible à gauche, d'inverse à gauche la matrice $T_{1,2}(-1)\,T_{2,3}(-1)\,T_{1,3}(-1)\,D_3(-1)\,T_{3,1}(-1)$.

D'après le cours, $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ et $Q^{-1} = T_{1,2}(-1)\,T_{2,3}(-1)\,T_{1,3}(-1)\,D_3(-1)\,T_{3,1}(-1)$, i.e. $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q6 — 2 point(s) — Que dire des matrices A_1 et A_2 ?

Nous avons établi que $QA_1 = A_2Q$ et que la matrice Q est inversible. Nous en déduisons que $A_2 = QA_1Q^{-1}$. Les matrices A_1 et A_2 sont donc semblables.

La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux, i.e.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}\,.$$

Q7 — 3 point(s) — Démontrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Nous calculons

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}[B]_{j,i} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} [BA]_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} [B]_{j,i}[A]_{i,j}$$

et en déduisons $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Q8 — 2 point(s) — Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$. À l'aide de la question précédente

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\left(PAP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}PA\right) = \mathrm{Tr}(I_nA) = \mathrm{Tr}(A)\,.$$

Q9 — 2 point(s) — Les matrices $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Nous calculons $\mathrm{Tr}(A_3) = 17$ et $\mathrm{Tr}(A_4) = 0$. Si $17 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ alors les matrices A_3 et A_4 ne sont pas semblables, d'après la contraposée du résultat de la question précédente.

§ 2 Commutants de matrices et centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (DB)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps. Le commutant $\mathscr{C}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A, i.e.

$$\mathscr{C}(A) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;:\; AM = MA\}\,.$$

Le centre $\mathscr{C}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres, i.e.

$$\mathscr{C} := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;:\; \forall\, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad MN = NM\} = \bigcap_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathscr{C}(A)\,.$$

Q10 — 3 point(s) — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $(M_1, M_2) \in \mathscr{C}(A)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Démontrons que $\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 \in \mathscr{C}(A)$, i.e. que $(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2)A = A(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2)$. Nous calculons

$$\begin{array}{rcll}
(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2)A & = & \lambda_1M_1A + \lambda_2M_2A & \\
& = & \lambda_1AM_1 + \lambda_2AM_2 & \left[(M_1,M_2) \in \mathscr{C}(A)^2\right] \\
& = & A\lambda_1M_1 + A\lambda_2M_2 & \left[(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right] \\
& = & A(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2)\,. &
\end{array}$$

Q11 — 4 point(s) — Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux-à-deux distincts. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Démontrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Par hypothèse, $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

- Soit M une matrice diagonale. Démontrons $M \in \mathscr{C}(D)$, i.e. que $MD = DM$.

Comme M est une matrice diagonale, il existe des scalaires $\mu_1,\dots,\mu_n$ tel que $M = \mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$. D'après le cours (cf. produit de deux matrices diagonales)

$$\begin{array}{rcll} MD & = & \mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) & \\ & = & \mathrm{Diag}(\mu_1\lambda_1,\dots,\mu_n\lambda_n) & \\ & = & \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n) & [\text{la multiplication de } \mathbb{K} \text{ est commutative}] \\ & = & \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\,\mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n) & \\ & = & DM\,. & \end{array}$$

- Soit $M \in \mathscr{C}(D)$. Démontrons que M est diagonale, i.e. que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $[M]_{i,j} = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Nous calculons

$$[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[D]_{k,j} = [M]_{i,j}[D]_{j,j} \qquad [D \text{ est diagonale}]$$

et

$$[DM]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}[M]_{k,j} = [D]_{i,i}[M]_{i,j} \qquad [D \text{ est diagonale}]\,.$$

Comme $MD = DM$, nous en déduisons

$$[M]_{i,j}\left([D]_{i,i} - [D]_{j,j}\right) = 0$$

puis $[M]_{i,j} = 0$ car $[D]_{i,i} \neq [D]_{j,j}$.

Q12 — 4 point(s) — Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'adresse (i,j) qui vaut 1. Démontrer que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathscr{C}(E_{i,j})$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

(a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $[M]_{k,i} = 0$.

(b) Pour tout $\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$, $[M]_{j,\ell} = 0$.

(c) $[M]_{i,i} = [M]_{j,j}$.

Soit $M \in \mathscr{C}(E_{i,j})$. Nous calculons

$$ME_{i,j} = \left(\sum_{1 \leqslant k,\ell, \leqslant n} [M]_{k,\ell}E_{k,\ell}\right)E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell, \leqslant n} [M]_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell}\delta_{\ell,i}E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{k,i}E_{k,j}$$

et

$$E_{i,j}M = E_{i,j}\left(\sum_{1 \leqslant k,\ell, \leqslant n} [M]_{k,\ell}E_{k,\ell}\right) = \sum_{1 \leqslant k,\ell, \leqslant n} [M]_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,\ell}\delta_{j,k}E_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{j,\ell}E_{i,\ell}\,.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} ME_{i,j} = ME_{i,j} & \iff & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,i}E_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{j,\ell}E_{i,\ell} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} \forall\, k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\} \quad [M]_{k,i} = 0 \\ \forall\, \ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\} \quad [M]_{j,\ell} = 0 \\ [M]_{i,i} = [M]_{j,j}\,. \end{array} \right. \end{array}$$

Q13 — 4 point(s) — Démontrer que $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mathscr{C}(E_{i,j})$.

- Si $M \in \mathscr{C}$ alors M commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, en particulier avec toutes les matrices $E_{i,j}$ où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Donc $M \in \displaystyle\bigcap_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mathscr{C}(E_{i,j})$.

L'inclusion $\mathscr{C} \subset \bigcap_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mathscr{C}(E_{i,j})$ est établie. Démontrons l'inclusion réciproque.

- Soit $M \in \displaystyle\bigcap_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mathscr{C}(E_{i,j})$. Démontrons que $M \in \mathscr{C}$, i.e. que, pour tout $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $NM = MN$.

Soit $N \in \mathscr{M}_nK$. Nous calculons

$$
\begin{aligned}
NM &= \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}[N]_{i,j}E_{i,j}\right)M \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}[N]_{i,j}E_{i,j}M \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}[N]_{i,j}ME_{i,j} && \left[M\in\bigcap_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\mathscr{C}\left(E_{i,j}\right)\right] \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}M[N]_{i,j}E_{i,j} && [\text{les } [N]_{i,j} \text{ sont des scalaires}] \\
&= M\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}[N]_{i,j}E_{i,j}\right) \\
&= MN.
\end{aligned}
$$

Q14 — 4 point(s) — En déduire que $\mathscr{C}=\mathrm{Vect}(I_n)$.

- Soit $M\in\mathrm{Vect}(I_n)$. Par définition de $\mathrm{Vect}(I_n)$, il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $M=\lambda I_n$. Nous démontrons que, pour tout $N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $NM=MN$.
Soit $N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme I_n commute avec N et $\lambda\in\mathbb{K}$

$$NM=N\lambda I_n=\lambda NI_n=\lambda I_nN=MN.$$

- Soit $M\in\mathscr{C}$.
  - Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ tel que $i\neq j$. Comme M commute avec $E_{j,i}$ nous savons que $[M]_{i,j}=0$ (cf. **Q12**). La matrice M est donc diagonale, i.e.
  $$M=\mathrm{Diag}\left([M]_{1,1},[M]_{2,2},\ldots,[M]_{n,n}\right).$$
  - Soit $i\in[\![2,n]\!]$. Comme M commute avec $E_{1,i}$ nous savons $[M]_{1,1}=[M]_{i,i}$ (cf. **Q12**). Ainsi
  $$M=\mathrm{Diag}\left([M]_{1,1},[M]_{1,1},\ldots,[M]_{1,1}\right)=[M]_{1,1}I_n\in\mathrm{Vect}(I_n).$$

§ 3 Matrices triangulaires strictes et nilpotence (DB)

Soient un entier $n\geqslant 3$ et $\mathbb{K}$ un corps. Pour tout $p\in[\![0,n-2]\!]$, on définit la partie F_p de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$F_p:=\left\{M=\left(m_{i,j}\right)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\ :\ \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad j-i\leqslant p\Longrightarrow[M]_{i,j}=0\right\}.$$

L'ensemble F_0 est donc l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux tous nuls.

Q15 — 5 point(s) — Soit $p\in[\![0,n-2]\!]$. Écrire F_p comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et en déduire une propriété de stabilité de F_p.

- Soit $M\in F_p$. Alors

$$M=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}[M]_{i,j}E_{i,j}=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ j-i\leqslant p}}[M]_{i,j}E_{i,j}+\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ j-i>p}}[M]_{i,j}E_{i,j}=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ j-i>p}}[M]_{i,j}E_{i,j}\in\mathrm{Vect}\left(\left\{E_{i,j}\ :\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\text{ tel que } j-i>p\right\}\right).$$

Ainsi $F_p\subset\mathrm{Vect}\left(\left\{E_{i,j}\ :\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\text{ tel que } j-i>p\right\}\right)$.
- Soit $M\in\mathrm{Vect}\left(\left\{E_{i,j}\ :\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\text{ tel que } j-i>p\right\}\right)$. Alors, si $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ est tel que $j-i\leqslant p$, le coefficient d'adresse (i,j) de M est nul. Ainsi $M\in F_p$.
- Nous avons démontré que $\underline{F_p=\mathrm{Vect}\left(\left\{E_{i,j}\ :\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\text{ tel que } j-i>p\right\}\right)}$. D'après le cours, nous en déduisons que $\underline{F_p}$ est stable par combinaison linéaire.

Q16 — 4 point(s) — Soit $(A,B)\in F_0\times F_{n-2}$. Démontrer que la matrice AB est nulle.

Comme $A\in F_0$

$$A=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ j-i>0}}[A]_{i,j}E_{i,j}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[A]_{i,j}E_{i,j}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}[A]_{i,j}E_{i,j}$$

et comme $B \in F_{n-2}$

$$B = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ j-i > n-2}} [B]_{i,j} E_{i,j} = \sum_{(i,j)=(1,n)} [B]_{i,j} E_{i,j} = [B]_{1,n} E_{1,n} \qquad \text{[cf. } \textbf{Q15}\text{]} .$$

Ainsi, comme $[B]_{1,n}$ est un scalaire

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} [A]_{i,j} E_{i,j} \right) \left([B]_{1,n} E_{1,n} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} [A]_{i,j} [B]_{1,n} E_{i,j} E_{1,n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} [A]_{i,j} [B]_{1,n} \delta_{j,1} E_{i,n} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} .$$

Q17 — 4 point(s) — Soit $(p,q) \in [\![0, n-2]\!]^2$ tel que $p+q \leqslant n-3$. Soit $(A,B) \in F_p \times F_q$. Démontrer que $AB \in F_{p+q+1}$.

Démontrons que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j-i \leqslant p+q+1$, $[AB]_{i,j} = 0$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j-i \leqslant p+q+1$. Par définition du produit matriciel

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} [B]_{k,j} .$$

Nous démontrons que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $[A]_{i,k}[B]_{k,j} = 0$, ce qui entraînera $[AB]_{i,j} = 0$.
Pour ce faire, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $[A]_{i,k}[B]_{k,j} \neq 0$. Comme $(A,B) \in F_p \times F_q$, ceci implique

$$k-i > p \quad \text{et} \quad j-k > q$$

i.e., puisque k,i,j,p,q sont entiers

$$k-i \geqslant p+1 \quad \text{et} \quad j-k \geqslant q+1 .$$

Nous en déduisons $j-i = j-k+k-i \geqslant p+q+2$, ce qui contredit l'hypothèse $j-i \leqslant p+q+1$.

Q18 — 3 point(s) — En déduire que si $A \in F_0$, alors A^n est la matrice nulle.

Soit $A \in F_0$. Nous démontrons que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $A^k \in F_{k-1}$.

- Initialisation à $k=1$. Par hypothèse, $A^1 = A \in F_0 = F_{1-1}$.
- Hérédité. Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$ fixé tel que $A^k \in F_{k-1}$. D'après **Q17**

$$A^{k+1} = A^k A \in F_{0+k-1+1} = F_k .$$

D'après ce qui précède $A^{n-1} \in F_{n-2}$. Avec **Q16**, nous en déduisons

$$A^n = A \times A \times A^{n-1} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} .$$

Q19 — 1 point(s) — Soient a,b,c,d,e,f,g,h,i,j des scalaires. Que vaut A^5 si $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 \\ g & h & i & j & 0 \end{pmatrix}$?

Nous observons que $A^\top \in F_0$, en spécialisant le cadre précédent à $n=5$. D'après **Q18**, $\left(A^\top\right)^5 = 0_{\mathscr{M}_5(\mathbb{K})}$. Nous en déduisons

$$A^5 = \left(\left(A^\top\right)^\top \right)^5 = \left(\left(A^\top\right)^5 \right)^\top = 0_{\mathscr{M}_5(\mathbb{K})}^\top = 0_{\mathscr{M}_5(\mathbb{K})} .$$

§ 4 Fonctions arithmétiques multiplicatives et applications [1] (Édouard Lucas)

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des nombres entiers naturels divisant n et on écrit $\sum_{d|n} = \sum_{d \in \mathscr{D}_n}$ la somme sur tous les nombres entiers naturels d divisant n.
Une fonction arithmétique est une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions arithmétiques est noté $\mathbb{A}$.
On dit qu'une fonction arithmétique $f \in \mathbb{A}$ est multiplicative si

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n) \end{cases}$$

On note $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives. On note $\mathbf{1}$, δ et $\mathbf{I}$ les fonctions arithmétiques

$$\mathbf{1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \qquad \delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n \geqslant 2 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \mathbf{I} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right.$$

On remarque que ces trois fonctions arithmétiques sont multiplicatives.
Si f et g sont deux fonctions arithmétiques, le produit de convolution de f et g est la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Q20 — 4 point(s) — Énoncer le théorème de changement d'indice pour les sommes finies de nombres complexes.

Cf. C5.17.

Q21 — 3 point(s) — Vérifier que δ est un élément neutre pour la loi $*$.

Soit $f \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left(f*\delta\right)(n) = f(n)\delta\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{d|n, d\neq n} f(d)\delta\left(\frac{n}{d}\right) = 1f(n) + 0 = f(n)$$

Ainsi $f * \delta = f$ et $f = \delta * f$ car $\left(\delta * f\right)(n) = \delta(1) f\left(\frac{n}{1}\right) + \sum_{d|n, d\neq 1} \delta(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$ d'où δ est un élément neutre pour la loi $*$. sur $\mathbb{A}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ d_1 d_2 = n\}$.

Q22 — 4 point(s) — Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f*g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathscr{C}_n} f(d_1) g(d_2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_n & \longrightarrow & \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 \end{array}$ est bien définie de bijection réciproque : $\begin{array}{ccc} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\} & \longrightarrow & \mathscr{C}_n \\ d & \longmapsto & \left(d, \dfrac{n}{d}\right) \end{array}$ ainsi on a bien $(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathscr{C}_n} f(d_1) g(d_2)$.

Q23 — 4 point(s) — En déduire que $*$ est commutative.

Soit $f, g \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_n & \longrightarrow & \mathscr{C}_n \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & (d_2, d_1) \end{array}$ est bijective de bijection réciproque elle-même. Ainsi

$$(f*g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathscr{C}_n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{(d_2,d_1)\in\mathscr{C}_n} g(d_2) f(d_1) = (g*f)(n)$$

d'où $f * g = g * f$ et $*$ est commutative .

Q24 — 4 point(s) — De même, en exploitant l'ensemble $\mathscr{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ d_1 d_2 d_3 = n\}$, montrer que $*$ est associative.

1. Extrait de la première épreuve du Concours Centrale-Supélec 2020, filière MP

Soit $f, g, h \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la bijection : $(d_1, d_2, d_3) \in \mathscr{C}'_n \mapsto (d_1, d_1 d_2) \in \{(e,d) \mid d \mid n \text{ et } e \mid d\}$

$$[(f * g) * h](n) = \sum_{d|n} \left(\sum_{e|d} f(e) g\left(\frac{d}{e}\right) \right) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n, e|d} f(e) g\left(\frac{d}{e}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1,d_2,d_3)\in\mathscr{C}'_n} f(d_1) g(d_2) h(d_3)$$

Puis de manière analogue, on obtient : $\displaystyle\sum_{(d_1,d_2,d_3)\in\mathscr{C}'_n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) = [f * (g * h)](n)$ d'où $(f * g) * h = f * (g * h)$ et ainsi $*$ est associative .

Q25 — 3 point(s) — Que peut-on dire de $(\mathbb{A}, +, *)$?

On sait que $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe commutatif. De plus, $*$ est commutative, associative et admet un élément neutre. Soit $f, g, h \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$[(f+g) * h](n) = \sum_{d|n} \big(f(d) + g(d)\big) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) = [(f * h) + (f * g)](n)$$

Donc $(f+g) * h = (f * h) + (g * h)$ et $h * (f+g) = (h * f) + (f * g)$ car $*$ commutative. On peut dire que $(\mathbb{A}, +, *)$ est un anneau commutatif .

Q26 — 4 point(s) — Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Montrer que si

$$\forall p \in \mathscr{P},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(p^k) = g(p^k)$$

alors $f = g$.

On suppose que $\forall p \in \mathscr{P},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(p^k) = g(p^k)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $n = 1$, on a $1 \wedge 1 = 1$ donc $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$ or $f(1) \neq 0$ donc $f(1) = 1 = g(1)$ (analogue)
Si $n > 2$, on écrit la décomposition en facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \text{ avec } r \in \mathbb{N}^*, \text{ les } p_i \in \mathscr{P} \text{ (distincts deux à deux) et les } \alpha_i \in \mathbb{N}^*$$

Par récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in [\![1, r]\!],\ f\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} f\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

Puis en utilisant l'hypothèse $f(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{\alpha_i}\right) = g(n)$ de façon analogue

En conclusion $f = g$.

Q27 — 6 point(s) — Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m & \longrightarrow & \mathscr{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 d_2 \end{array} \right.$$

est bien définie et réalise une bijection entre $\mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}_{mn}$.

bien définie : Soit $(d_1, d_2) \in \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$. On peut écrire $n = d_1 q_1$ et $m = d_2 q_2$ avec $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$ donc $nm = (d_1 d_2)(q_1 q_2)$ d'où $d_1 d_2 \mid nm$ et ainsi $d_1 d_2 \in \mathscr{D}_{mn}$ donc π est bien définie.

injective : Soit (d_1, d_2) et $(e_1, e_2) \in \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$ tels que $\pi(d_1, d_2) = \pi(e_1, e_2)$ On a $d_1 d_2 = e_1 e_2$ ainsi $e_1 \mid d_1 d_2$ Comme $n \wedge m = 1$, donc n et m n'ont aucun facteurs premiers en commun comme $e_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$, alors e_1 et d_2 n'ont aucun facteurs premiers en commun donc $e_1 \wedge d_2 = 1$. Ainsi avec le théorème de Gauss, $e_1 \mid d_1$ et de façon analogue $d_1 \mid e_1$ comme $d_1 \in \mathbb{N}$ et $e_1 \in \mathbb{N}$, on a $e_1 = d_1$ puis on obtient $(d_1, d_2) = (e_1, e_2)$ Ce qui prouve l'injectivité de π

surjective : Soit $d \in \mathscr{D}_{mn}$. On écrit les décompositions en facteurs premiers de n et m : $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $m = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$ Comme $n \wedge m = 1$, les p_i sont distincts des q_i et on peut écrire

$$d = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha'_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta'_i}\right) \text{ avec } 0 \leqslant \alpha'_i \leqslant \alpha_i \text{ et } 0 \leqslant \beta'_i \leqslant \beta_i$$

Je pose $d_1 = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha'_i}$ et $d_2 = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta'_i}$ de sorte que $d = d_1 d_2$, $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$ d'où $(d_1, d_2) \in \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$ et $\pi(d_1, d_2) = d$ Ce qui prouve la surjectivité de π

En conclusion π est bien définie et réalise une bijection entre $\mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}_{mn}$.

Q28 — 4 point(s) — En déduire que si f et g sont deux fonctions multiplicatives, alors $f * g$ est encore multiplicative.

On suppose que f et g sont deux fonctions multiplicatives. Alors $f(1) = 1 = g(1)$ d'où

$$(f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d) g\left(\frac{1}{d}\right) = f(1)g(1) = 1 \neq 0$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge m = 1$. En utilisant la bijectivité de π de 7 :

$$(f * g)(nm) = \sum_{d \in \mathscr{D}_{mn}} f(d) g\left(\frac{nm}{d}\right) = \sum_{(d_1,d_2) \in \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m} f(d_1 d_2) g\left(\frac{nm}{d_1 d_2}\right)$$

En regardant les facteurs premiers on voit que pour $(d_1, d_2) \in \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$, on a $d_1 \wedge d_2 = 1 = \frac{n}{d_1} \wedge \frac{m}{d_2}$ donc

$$(f * g)(nm) = \sum_{(d_1,d_2) \in \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m} f(d_1) f(d_2) g\left(\frac{n}{d_1}\right) g\left(\frac{m}{d_2}\right) = \sum_{d_1 \in \mathscr{D}_n} f(d_1) g\left(\frac{n}{d_1}\right) \sum_{d_2 \in \mathscr{D}_m} f(d_2) g\left(\frac{m}{d_2}\right)$$

donc $(f * g)(nm) = (f * g)(n)(f * g)(m)$ et ainsi $f * g$ est encore multiplicative .

Q29 — 6 point(s) — Soit f une fonction multiplicative. Montrer qu'il existe une fonction multiplicative g telle que

$$\forall p \in \mathscr{P},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$$

et qu'elle vérifie $f * g = \delta$.

On veut juste l'existence de g mais pour rechercher g, je traite cela par analyse synthèse.

Analyse : Soit $g \in \mathbb{M}$ convenant. Ainsi, on a $g(1) = 1$. Puis pour $p \in \mathscr{P}$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, les $g(p^k)$ sont définis par

$$g(p^0) = 1 \text{ et la relation } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$$

Ainsi g est définie sur $P_P = \left\{p^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathscr{P}\right\}$. Enfin pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus P_P$, on écrit sa décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et nécessairement

$$g(n) = \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{\alpha_i}\right) \quad (*)$$

car les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux.

Synthèse : Soit g défini par $g(1) = 1$ puis sur P_P par les relations de récurrence (pour chaque $p \in \mathscr{P}$) et enfin par la relation (*). Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, l'application g est ainsi bien définie. et la formule $(*)$ est valable pour $n \in P_P$. (Pour $n = 1$, on a $r = 0$ et pour $n \in P_P \setminus \{1\}$, on a $r = 1$).

Soit alors $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$. On écrit les décompositions en facteurs premiers de $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $m = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$.

Comme $n \wedge m = 1$, la décomposition (à l'ordre près) de nm en produit de facteurs premiers est $nm = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}\right)$.

On a alors :

$$g(nm) = g\left[\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}\right)\right] = \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{\alpha_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{s} g\left(q_i^{\beta_i}\right) = g(n)g(m)$$

Conclusion : On a bien une fonction g multiplicative vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathscr{P}, g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$ On remarque que l'unicité a été établie.

D'après l'énoncé et la question précédente, les fonctions δ et $f * g$ sont multiplicatives. Soit $p \in \mathscr{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que $\delta = f * g$, il suffit d'établir que $\delta\left(p^k\right) = (f * g)\left(p^k\right)$. Comme on a $\mathscr{D}_{p^k} = \left\{p^i \mid i \in [\![0, k]\!]\right\}$, on a

$$(f * g)\left(p^k\right) = \sum_{i=0}^{k} f\left(p^i\right) g\left(p^{k-i}\right) = f(1) g\left(p^k\right) + \sum_{i=1}^{k} f\left(p^i\right) g\left(p^{k-i}\right)$$

Par définition (*) de g et comme $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(f * g)\left(p^k\right) = g\left(p^k\right) - g\left(p^k\right) = 0 = \delta\left(p^k\right)$$

Ce qui permet de conclure que : $\underline{f * g = \delta}$.
On remarque pour la suite qu'une fonction de $\mathbb{M}$ est caractérisée par les valeurs prises sur $\left\{p^k \mid p \in \mathscr{P}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Q30 — 2 point(s) — Que dire de l'ensemble $\mathbb{M}$ muni de la loi $*$?

Nous avons déjà démontré que $*$ induit une loi de composition interne sur $\mathbb{M}$. Avec les premières questions du problème, on voit que $*$ est commutative, associative et admet pour neutre $\delta \in \mathbb{M}$. De plus, on vient de voir que $\forall f \in \mathbb{M},\ \exists g \in \mathbb{M},\ f * g = \delta = g * f$ ce qui prouve tout élément de $\mathbb{M}$ admet un symétrique pour $*$ dans $\mathbb{M}$. On peut conclure que $\underline{(\mathbb{M}, *) \text{ est un groupe abélien}}$.

Soit μ la fonction arithmétique définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q31 — 4 point(s) — Montrer que μ est multiplicative.

On a $\mu(1) = 1 \neq 0$. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$. Montrons $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$. Si $n = 1$, alors on a bien $\mu(nm) = \mu(m) = \mu(n)\mu(m)$. Si $m = 1$, c'est analogue.
Si n ou m n'est pas produit de nombres premiers distincts, alors il en est de même pour nm et on a $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$.
Si n et m sont produits respectivement de r et s nombres premiers distincts. Alors comme $n \wedge m = 1$ alors nm est le produit de $r + s$ nombres premiers distincts et on a $\mu(nm) = (-1)^{r+x} = (-1)^r(-1)^s = \mu(n)\mu(m)$ On a bien montré que $\underline{\mu \text{ est multiplicative}}$.

Q32 — 4 point(s) — Montrer que $\mu * \mathbf{1} = \delta$.

Pour établir que $\mu * \mathbf{1} = \delta$ il suffit d'établir que μ est le symétrique de $\mathbf{1}$ dans le groupe $(\mathbb{M}, *)$. La relation établie précédemment détermine $g \in \mathbb{M}$ comme étant le symétrique de f.
Soit $p \in \mathscr{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il suffit alors d'établir que $\mathbf{1}(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(p^i)\mathbf{1}(p^{k-i})$ c'est à dire $1 + \sum_{i=1}^{k} \mu(p^i) = 0$ Comme $\mu(p) = -1$ et $\forall j \geqslant 2,\ \mu(j) = 0$, l'égalité est établie.
On a montré que $\underline{\mu * \mathbf{1} = \delta}$.

Q33 — 2 point(s) — Soit $f \in \mathbb{A}$ et soit $F \in \mathbb{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\mathbf{1}\left(\frac{n}{d}\right) = \left(f * \mathbf{1}\right)(n)$. Ainsi $F = f * \mathbf{1}$. Comme $*$ est commutative et que μ et $\mathbf{1}$ sont symétriques dans le groupe $(\mathbb{M}, *)$ d'après la question précédente. On a

$$\mu * F = \mu * \mathbf{1} * f = \delta * f = f$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$

On note φ la fonction indicatrice d'Euler, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}$$

On admet[2] que la fonction $\varphi \in \mathbb{M}$.

Q34 — 2 point(s) — Soient $p \in \mathscr{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\varphi(p^k)$.

2. Il s'agit d'un théorème du programme de MPI

Comme p est premier, les seuls nombres de $[\![1, p^k]\!]$ ne sont pas premiers avec p sont les multiples de p dans cet ensemble, i.e. les nombres pq où $q \in [\![1, p^{k-1}]\!]$. On en déduit que

$$\varphi p^k = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Q35 — 3 point(s) — Démontrer que $\varphi = \mu * \mathbf{I}$.

Soit $p \in \mathscr{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de montrer que $\varphi(p^k) = \mu * I(p^k)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, comme p est premier, la question précédente livre

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

et

$$\left(\mu * \mathbf{I}\right)(p^k) = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i)\mathbf{I}\left(p^{k-i}\right) = \mu(1)\mathbf{I}\left(p^k\right) + \mu(p)\mathbf{I}\left(p^{k-1}\right) + 0 = p^k - p^{k-1}$$

ainsi on a bien $\varphi(p^k) = \mu * \mathbf{I}(p^k)$ ce qui permet de conclure que $\underline{\varphi = \mu * \mathbf{I}}$.

Soient f une fonction arithmétique, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g = f * \mu$. On note $M = (m_{i,j})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $m_{i,j} = f(i \wedge j)$. On définit aussi la <u>matrice des diviseurs</u> $D = (d_{i,j})$ par

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit M' la matrice de terme général $m'_{i,j} = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q36 — 4 point(s) — *Montrer que $M = M'D^\top$.*

Je note d'_{ij} respectivement n'_{ij} le terme général de $D^\top$ respectivement $M'D^\top$. On a

$$n'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik}d'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik}d_{jk} = \sum_{k|j, k|i} g(k) = \sum_{k|(i\wedge j)} g(k) = \left(g * \mathbf{1}\right)(i \wedge j)$$

or $g * \mathbf{1} = f * \mu * \mathbf{1} = f$ d'après 12 donc $n'_{ij} = f(i \wedge j) = m_{ij}$
d'où $\underline{M = M'D^\top}$.