UN CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N°1

EXERCICE 1 (PARTIES PAIRE ET IMPAIRE D'UNE FONCTION)

Q1 — Cf. Chapitre 1 « Logique et raisonnement » [C1.62].

EXERCICE 2 (CALCUL D'UNE SOMME TRIGONOMÉTRIQUE)

Q2 — Cf. Chapitre 2 « Trigonométrie » [C2.22 et C2.58].

Q3 — Cf. Chapitre 2 « Trigonométrie » [C2.25].

Q4 — Cf. Chapitre 3 « Nombres complexes » [C3.84].

Q5 — Cf. Chapitre 3 « Nombres complexes » [C3.93].

Q6 — Cf. Chapitre 3 « Nombres complexes » [C3.93].

Q7 — D'après la formule de duplication pour cosinus, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}.$$

Ainsi :

$$(\star) \qquad S_n(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx+2y) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx+2y) + \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} e^{i(2kx+2y)}}_{=:T_n(x,y)}\right) + \frac{n+1}{2}.$$

Nous réécrivons la somme $T_n(x,y)$:

$$T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(2kx+2y)} \underset{\mathbf{Q4}}{=} \sum_{k=0}^{n} e^{i2kx}e^{i2y} \underset{\mathbf{Q5}}{=} e^{i2y}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i2x}\right)^k.$$

Nous reconnaissons une somme de termes en progression géométrique, qui nous conduit à scinder l'étude en deux parties.

- *1er cas : $e^{i2x} = 1$, i.e. $x \equiv 0\ [\pi]$* Alors : $T_n(x,y) = (n+1)e^{i2y}$ et d'après $(\star)$:

$$S_n(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left((n+1)e^{i2y}\right) + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)}{2}\left(\cos(2y)+1\right).$$

- *2ème cas : $e^{i2x} \neq 1$, i.e. $x \not\equiv 0\ [\pi]$* Dans ce cas :

$$T_n(x,y) = e^{i2y}\frac{1-e^{i2(n+1)x}}{1-e^{i2x}} \underset{\text{moitié}}{\overset{\text{angle}}{=}} e^{i2y}\frac{-2ie^{i(n+1)x}\sin((n+1)x)}{-2ie^{ix}\sin(x)} \underset{\mathbf{Q4}}{=} e^{i(2y+nx)}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}.$$

Ainsi, d'après $(\star)$:

$$S_n(x,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{i(2y+nx)}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\right) + \frac{n+1}{2} = \frac{\cos(2y+nx)\sin((n+1)x)}{2\sin(x)} + \frac{n+1}{2}.$$

Nous avons établi le résultat suivant.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx+y) = \begin{cases} \dfrac{(n+1)}{2}\left(\cos(2y)+1\right) & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\[2ex] \dfrac{\cos(2y+nx)\sin((n+1)x)}{2\sin(x)} + \dfrac{n+1}{2} & \text{si } x \not\equiv 0\ [\pi]. \end{cases}}$$

EXERCICE 3 (ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES)

Q8 — Nous résolvons l'équation (E_1) à l'aide d'une transformation de Fresnel. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(x)+\sin(x)=1 &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad [\text{formule d'addition pour cosinus}]\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcll} & x-\frac{\pi}{4} & = & \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\ \text{ou} & & & \\ & x-\frac{\pi}{4} & = & -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]\end{array}\right. \qquad [\text{cas d'égalité de deux cosinus}]\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcll} & x & = & \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} & & & \\ & x & = & 0 \quad [2\pi]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation (E_1) est $\boxed{Sol_{(E_1)}=\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k2\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\}\,.}$

Q9 — D'après la relation de Pythagore, tout nombre réel est solution de (E_2). L'ensemble solution de l'équation (E_2) est donc $\boxed{Sol_{(E_2)}=\mathbb{R}\,.}$

Q10 — Nous posons $n=2p$ où $p\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et nous résolvons l'équation :

$$(E_n) \qquad \cos^{2p}(x)+\sin^{2p}(x)=1$$

d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, par analyse-synthèse.

- *Analyse* Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $\cos^{2p}(x)+\sin^{2p}(x)=1$.
  - Supposons que $0<\cos^2(x)<1$.
    Comme $p-1>0$, la fonction $t\longmapsto t^{p-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons :
    $$\cos^{2p-2}(x)<1$$
    puis, comme $\cos^2(x)>0$:
    $$(\star) \qquad \cos^{2p}(x)<\cos^2(x)\,.$$
    De $0\leqslant\sin^2(x)\leqslant 1$ et de la croissance de la fonction $t\longmapsto t^{p-1}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous déduisons :
    $$\sin^{2p-2}(x)\leqslant 1$$
    puis, comme $\sin^2(x)\geqslant 0$:
    $$(\star\star) \qquad \sin^{2p}(x)\leqslant\sin^2(x)\,.$$
    En additionnant membre-à-membre les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$, il vient :
    $$1=\cos^{2p}(x)+\sin^{2p}(x)<\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$$
    ce qui n'est pas.
  - D'après ce qui précède, $\cos^2(x)=0$ ou $\cos^2(x)=1$ et donc :
    $$\cos(x)=0=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \cos(x)=1=\cos(0) \quad \text{ou} \quad \cos(x)=-1=\cos(\pi)\,.$$

— D'après le cas d'égalité de deux cosinus, si x est solution de (E_n) alors nécessairement :

$$x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

- *Synthèse* Soit x un réel vérifiant $x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Alors :

$$x \equiv 0\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \pi\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi].$$

— Si $x \equiv 0\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $\cos^2(x) = 1$ et $\sin^2(x) = 0$. Nous calculons alors :

$$\cos^{2p}(x) + \sin^{2p}(x) = \left(\cos^2(x)\right)^p + \left(\sin^2(x)\right)^p = 1^p + 0^p \underset{p \geqslant 1}{=} 1 + 0 = 1.$$

— Si $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$, alors $\cos^2(x) = 0$ et $\sin^2(x) = 1$. Nous calculons alors :

$$\cos^{2p}(x) + \sin^{2p}(x) = \left(\cos^2(x)\right)^p + \left(\sin^2(x)\right)^p = 0^p + 1^p \underset{p \geqslant 1}{=} 0 + 1 = 1.$$

- *Conclusion* L'ensemble solution de l'équation (E_n) est donc $\boxed{Sol_{(E_n)} = \left\{k\frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

Q11 — Nous posons $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et nous résolvons l'équation :

$$(E_n) \qquad \cos^{2p+1}(x) + \sin^{2p+1}(x) = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, par analyse-synthèse.

- *Analyse* Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos^{2p+1}(x) + \sin^{2p+1}(x) = 1$.

— Comme $2p+1$ est impair, la fonction $t \longmapsto t^{2p+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, de $\sin(x) \leqslant 1$ nous déduisons :

$$\sin^{2p+1}(x) \leqslant 1$$

puis :

$$0 \leqslant 1 - \sin^{2p+1}(x) = \cos^{2p+1}(x).$$

Comme $2p+1$ est impair, nécessairement $\cos(x) \geqslant 0$.

— Supposons que $0 < \cos(x) < 1$.
Comme $2p-1 > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{2p-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons :

$$\cos^{2p-1}(x) < 1$$

puis, comme $\cos^2(x) > 0$:

$$(\star) \qquad \cos^{2p+1}(x) < \cos^2(x).$$

Comme $2p-1$ est impair, la fonction $t \longmapsto t^{2p-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, de $\sin(x) \leqslant 1$ nous déduisons :

$$\sin^{2p-1}(x) \leqslant 1$$

puis, comme $\sin^2(x) \geqslant 0$:

$$(\star\star) \qquad \sin^{2p+1}(x) \leqslant \sin^2(x).$$

En additionnant membre-à-membre les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$, il vient :

$$1 = \cos^{2p+1}(x) + \sin^{2p+1}(x) < \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

ce qui n'est pas.

— D'après ce qui précède :

$$\cos(x) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \cos(x) = 1 = \cos(0).$$

— D'après le cas d'égalité de deux cosinus, si x est solution de (E_n) alors nécessairement :

$$x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv 0\ [2\pi].$$

- *Synthèse* Soit x un réel tel que :

$$x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv 0\ [2\pi]\,.$$

— Si $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, alors $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 1$. Nous calculons alors :

$$\cos^{2p+1}(x) + \sin^{2p+1}(x) = 0^{2p+1} + 1^{2p+1} \underset{2p+1 \geqslant 1}{=} 0 + 1 = 1\,.$$

— Si $x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, alors $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$. Nous calculons alors :

$$\cos^{2p+1}(x) + \sin^{2p+1}(x) = 0^{2p+1} + (-1)^{2p+1} \underset{2p+1 \geqslant 1 \text{ et } 2p+1 \text{ impair}}{=} 0 - 1 = -1 \neq 1\,.$$

— Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\cos(x) = 1$ et $\sin(x) = 0$. Nous calculons alors :

$$\cos^{2p+1}(x) + \sin^{2p+1}(x) = 1^{2p+1} + 0^{2p+1} \underset{2p+1 \geqslant 1}{=} 1 + 0 = 1\,.$$

- *Conclusion* L'ensemble solution de l'équation (E_n) est donc $\boxed{Sol_{(E_n)} = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k2\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}\,.}$

EXERCICE 4 (EXPRESSIONS DE $\sin(3x)$ OÙ $x \in \mathbb{R}$) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Q12 — D'après la formule d'addition pour sinus :

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\,.$$

D'après les formules de duplication pour cosinus et sinus :

$$\sin(3x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + \left(2\cos^2(x) - 1\right)\sin(x)\,.$$

D'après la relation de Pythagore :

$$\sin(3x) = 2\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) + \left(2\left(1 - \sin^2(x)\right) - 1\right)\sin(x)\,.$$

Nous en déduisons que $\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\,.}$

Q13 — D'après les formules d'addition pour sinus :

$$4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 4\sin(x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 4\sin(x)\left(\frac{3}{4}\cos^2(x) - \frac{1}{4}\sin^2(x)\right)\,.$$

D'après la relation de Pythagore :

$$4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin(x)\left(3\left(1 - \sin^2(x)\right) - \sin^2(x)\right) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\,.$$

En appliquant Q12, il vient $\boxed{\sin(3x) = 4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).}$

EXERCICE 5 (ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE LINÉAIRE D'ORDRE 3)

Q14 — Comme :

$$j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

la formule de Moivre livre $j^3 = e^{i2\pi} = 1$. Nous scindons donc l'étude en trois parties, suivant la valeur du reste de la division euclidienne de p par 3.

- *Cas où* $p \equiv 0\ [3]$ Comme il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3q$, nous calculons :

$$j^p = \left(j^3\right)^q = 1^q = 1\,.$$

- *Cas où* $p \equiv 1\ [3]$ Comme il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3q+1$, nous calculons :

$$j^p = \left(j^3\right)^q j = 1^q j = j\,.$$

- *Cas où* $p \equiv 2\ [3]$ Comme il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3q+2$, nous calculons :

$$j^p = \left(j^3\right)^q j^2 = 1^q j^2 = j^2\,.$$

Ainsi $\boxed{j^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 0\ [3]\,; \\ j & \text{si } p \equiv 1\ [3]\,; \\ j^2 & \text{si } p \equiv 2\ [3]. \end{cases}}$

Q15 — Nous reconnaissons une somme de termes en progression géométrique de raison $j \neq 1$. Ainsi :

$$1 + j + j^2 = \sum_{k=0}^{2} j^k = \frac{1-j^3}{1-j}\,.$$

À l'aide de Q14, il vient $\boxed{1 + j + j^2 = 0\,.}$

Q16 — Nous calculons :

$$(z-1)(z-j)\left(z-j^2\right) = (z^2-(1+j)z+j)\left(z-j^2\right) = z^3-(1+j+j^2)z^2+\left(j+j^2+j^3\right)z-j^3\,.$$

De Q14 et Q15 nous déduisons alors $\boxed{(z-1)(z-j)\left(z-j^2\right) = z^3-1\,.}$

Q17 — Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcll} z^3 = 1 & \iff & (z-1)(z-j)\left(z-j^2\right) = 0 & [\text{Q16}] \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ \text{ou} \\ z = j \\ \text{ou} \\ z = j^2 \end{array} \right. & [\mathbb{C} \text{ est intègre}] \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble solution de l'équation } z^3 = 1 \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C} \text{ est donc } \left\{1, j, j^2\right\}.}$

Q18 — Nous raisonnons par analyse et synthèse.

- *Analyse* Supposons qu'il existe trois nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda_0 + \lambda_1 j^n + \lambda_2 j^{2n}\,.$$

En spécialisant la précédente identité à $n \leftarrow 0$, $n \leftarrow 1$ et $n \leftarrow 2$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 j & + & \lambda_2 j^2 & = & u_1 \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 j^2 & + & \lambda_2 j & = & u_2\,. \end{array} \right.$$

En appliquant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ & & \lambda_1(j-1) & + & \lambda_2\left(j^2-1\right) & = & u_1 - u_0 \\ & & \lambda_1\left(j^2-1\right) & + & \lambda_2(j-1) & = & u_2 - u_0\,. \end{array} \right.$$

En appliquant l'opération élémentaire : $L_3 \leftarrow L_3 - (j+1)L_2$ il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ & & \lambda_1(j-1) & + & \lambda_2\left(j^2-1\right) & = & u_1-u_0 \\ & & & & 3j\lambda_2 & = & ju_0+j^2u_1+u_2\,. \end{array}\right.$$

Ainsi, « en remontant », nous obtenons :

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\left(u_0+ju_1+j^2u_2\right) \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}\left(u_0+j^2u_1+ju_2\right) \quad ; \quad \lambda_0 = \frac{1}{3}\left(u_0+u_1+u_2\right)\,.$$

En particulier, il n'y a qu'une valeur possible pour chacun des complexes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Ainsi, si ces trois nombres existent, ils sont nécessairement uniques.

- *Synthèse* Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ comme en fin d'analyse. Nous démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(n)\ :\ u_{n+3} = u_n$$

à l'aide d'une récurrence à trois pas.

— *Initialisation à $n=0$, $n=1$ et $n=3$* Nous calculons :

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2 = \frac{1}{3}\left(3u_0+(1+j^2+j)u_1+(1+j+j^2)u_2\right) = u_0$$

$$\lambda_0+\lambda_1 j+\lambda_2 j^2 = \frac{1}{3}\left((1+j+j^2)u_0+(1+j^3+j^3)u_1+(1+j^2+j)u_2\right) = u_1$$

$$\lambda_0+\lambda_1 j^2+\lambda_2 j^4 = \frac{1}{3}\left((1+j^2+j)u_0+(1+j+j^2)u_1+(1+j^3+j^3)u_2\right) = u_2$$

et vérifions donc que $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

— *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vraies. Démontrons $\mathscr{P}(n+3)$, i.e. que :

$$u_{n+3} = \lambda_0+\lambda_1 j^{n+3}+\lambda_2 j^{2n+6}\,.$$

D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite et $\mathscr{P}(n)$:

$$(\star) \qquad u_{n+3} = u_n = \lambda_0+\lambda_1 j^n+\lambda_2 j^{2n}\,.$$

D'autre part :

$$(\star\star) \qquad \lambda_0+\lambda_1 j^{n+3}+\lambda_2 j^{2n+6} = \lambda_0+\lambda_1 j^n j^3+\lambda_2 j^{2n} j^6 = \lambda_0+\lambda_1 j^n+\lambda_2 j^{2n}\,.$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$u_{n+3} = \lambda_0+\lambda_1 j^{n+3}+\lambda_2 j^{2n+6}\,.$$

EXERCICE 6 (POINT DE FERMAT)

Q19 — Cf. Chapitre 3 « Nombres complexes » [C3.67].

Q20 — Nous raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Comme le module est multiplicatif :

$$|z_1|+|z_2| = |z_1|+|\lambda z_1| = |z_1|+|\lambda|\,|z_1| \underset{\lambda\in\mathbb{R}_+}{=} |z_1|+\lambda\,|z_1| = (1+\lambda)\,|z_1| \underset{1+\lambda\in\mathbb{R}_+}{=} |1+\lambda|\,|z_1| = |(1+\lambda)z_1| = |z_1+\lambda z_1| = |z_1+z_2|\,.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$. Alors en élevant au carré, il vient :

$$(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\,.$$

puis :

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\overline{z_1}\,z_2+z_1\,\overline{z_2}=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,|z_1|\,|z_2|\ .$$

et enfin :

$$(\star)\qquad \mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\,z_2\right)=|z_1|\,|z_2|=\left|\overline{z_1}\right|\,|z_2|=\left|\overline{z_1}\,z_2\right|\ .$$

Nous en déduisons :

$$\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\,z_2\right)^2=\left|\overline{z_1}\,z_2\right|^2=\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\,z_2\right)^2+\mathrm{Im}\left(\overline{z_1}\,z_2\right)^2$$

d'où $\mathrm{Im}\left(\overline{z_1}\,z_2\right)=0$. Ainsi $(\star)$ se réécrit :

$$\overline{z_1}\,z_2=\left|\overline{z_1}\,z_2\right|\ .$$

Comme $z_1\neq 0$, nous en déduisons finalement :

$$z_2=\underbrace{\frac{\left|\overline{z_1}\,z_2\right|}{|z_1|^2}}_{:=\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}\,z_1\ .$$

Q21 — Nous démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$:

$$\mathscr{P}(n)\quad:\quad\forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|\ .$$

- *Initialisation à $n=2$* L'assertion $\mathscr{P}(2)$ est l'inégalité triangulaire « de droite » énoncée en Q19. Nous savons qu'elle est vraie, d'après le cours.
- *Hérédité* Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $(z_1,\dots,z_n,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$. Alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}z_k+z_{n+1}\right|\underset{\text{Q19}}{\leqslant}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|+|z_{n+1}|\underset{\text{HR}}{\leqslant}\sum_{k=1}^{n}|z_k|+|z_{n+1}|=\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|\ .$$

Q22 — Nous démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$:

$$\mathscr{P}(n)\quad:\quad\forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^n\qquad\left(\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\iff\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{R}_+)^n\quad\forall\,k\in[\![1,n]\!]\quad z_k=\lambda_k z_1\right).$$

- *Initialisation à $n=2$* L'assertion $\mathscr{P}(2)$ a été établie en Q20 quitte à poser dans le cas où $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ vérifie $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$, $\lambda_1:=1\in\mathbb{R}_+$ et $\lambda_2:=\lambda\in\mathbb{R}_+$.
- *Hérédité* Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient $(z_1,\dots,z_n,z_{n+1})\in(\mathbb{C}^*)^{n+1}$. Nous démontrons :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|=\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|\iff\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1})\in(\mathbb{R}_+)^{n+1}\quad\forall\,k\in[\![1,n+1]\!]\quad z_k=\lambda_k z_1$$

par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1})\in(\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$, $z_k=\lambda_k z_1$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k z_1\right|\\ &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\right)z_1\right|\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\right)|z_1| && \left[\text{multiplicativité du module et }\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\in\mathbb{R}_+\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\,|z_1|\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\underbrace{|\lambda_k\,z_1|}_{|z_k|} && \left[\text{multiplicativité du module et }\lambda_1\in\mathbb{R}_+,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{R}_+\right].\end{aligned}$$

Ici l'hypothèse de récurrence n'a été d'aucune utilité.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$.

— Nous observons :

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \underset{\text{Q19}}{\leqslant} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$$

— Nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \underset{\text{Q21}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

i.e. $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

— D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(\star) \qquad \text{il existe des réels positifs } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ tels que, pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ z_k = \lambda_k z_1.$$

— Posons alors :

$$z'_1 := z_1 \qquad \dots \qquad z'_{n-1} := z_{n-1} \qquad z'_n := z_{n+1} \qquad z'_{n+1} := z_n\,.$$

Le $(n+1)$-uplet $(z'_1, \dots, z'_{n-1}, z'_n, z'_{n+1})$ est donc obtenu à partir du $(n+1)$-uplet $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1})$ en échangeant ses deux dernières composantes $(n+1 \geqslant 3)$. Ainsi $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z'_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z'_k|$ et le résultat $(\star)$ obtenu pour le $(n+1)$-uplet $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1})$ vaut également pour le $(n+1)$-uplet $(z'_1, \dots, z'_{n-1}, z'_n, z'_{n+1})$.

— En particulier, il existe $\lambda'_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_{n+1} =: z'_n = \lambda'_n z'_1 = \lambda'_n z_1$. En posant $\lambda_{n+1} := \lambda'_n \in \mathbb{R}_+$, il vient :

$$(\star\star) \qquad z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1\,.$$

— De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons qu'il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $z_k = \lambda_k z_1$.

Q23 — Soient deux nombres complexes non nuls ξ_1 et ξ_2. Nous vérifions :

$$\arg(\xi_1) \equiv \arg(\xi_2) \quad [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \xi_2 = \lambda \xi_1$$

en raisonnant par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\arg(\xi_1) \equiv \arg(\xi_2) \quad [2\pi]$. Alors d'après le cours :

$$\arg\left(\frac{\xi_2}{x_1}\right) \equiv \arg(\xi_2) - \arg(\xi_1) \equiv 0 \quad [2\pi]$$

i.e. $\lambda := \dfrac{\xi_2}{\xi_1} \in \mathbb{R}_+$. Comme $\xi_2 = \lambda \xi_1$ l'implication est démontrée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\xi_2 = \lambda \xi_1$. Alors d'après le cours :

$$\arg(\xi_2) \equiv \arg(\lambda \xi_1) \equiv \underbrace{\arg(\lambda)}_{\equiv 0\ [2\pi]} + \arg(\xi_1) \equiv \arg(\xi_1) \quad [2\pi]\,.$$

Grâce à l'équivalence que nous venons d'établir, le résultat de Q22 se reformule comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout n-uplet $(z_1, \dots, z_n)$ de complexes tous non nuls :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \text{ si et seulement si } z_1, \dots, z_n \text{ ont même argument.}}$$

Q24 — Si l'on pose $\boxed{(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, i, -1, -i)}$ alors $\sum_{k=1}^{4} \dfrac{z_k}{|z_k|} = 1 + i - 1 - i = 0$.

Q25 — Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,(z-z_k) &= \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,z - \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,z_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\right) z - \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,z_k \\
&= \left(\overline{\sum_{k=1}^{n} u_k}\right) z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}\,z_k \qquad \text{[conjugué d'un quotient/d'un réel/d'une somme]} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} \qquad \text{[hypothèse (iv), carré d'un module et conjugaison]} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} |z_k|\ .
\end{aligned}$$

Ainsi, avons-nous établi $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,(z-z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.}$

Q26 — Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |z_k| &= \left|\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right| \qquad \text{[le module d'un réel positif égale ce réel]} \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}\,(z-z_k)\right| \qquad \text{[Q25]} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|-\overline{u_k}\,(z-z_k)\right| \qquad \text{[Q21]} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left|-\overline{u_k}\right|\,|z-z_k| \qquad \text{[multiplicativité du module]} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z-z_k| \qquad [u_1,\ldots,u_n \text{ sont de module 1 .}]
\end{aligned}$$

Ainsi, avons-nous établi $\boxed{\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.}$

Q27 — Nous raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u_k}\,(z-z_k)$ est un réel négatif. Nous calculons :

$$\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left|-\overline{u_k}\right|}_{=1} |z-z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} \underbrace{-\overline{u_k}(z-z_k)}_{\in\mathbb{R}_+}\right| = \sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}(z-z_k) = -\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z-z_k) \underset{\text{Q25}}{=} \sum_{k=1}^{n} |z_k|\ .$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que l'inégalité $(\star)$ est une égalité et démontrons que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u_k}\,(z-z_k)$ est un réel négatif. Nous scindons l'étude en deux parties suivant que M soit un des points $A_1,\ldots,A_n$ ou non.

- *Cas où $z \notin \{z_1,\ldots,z_n\}$* Dans ce cas les complexes $-\overline{u_k}\,(z-z_k)$, où $k \in [\![1,n]\!]$, sont tous non nuls (hypothèse utile pour pouvoir appliquer Q22). Nous calculons :

$$\sum_{k=1}^{n} -\overline{u_k}(z-z_k) \underset{\text{Q25}}{=} \sum_{k=1}^{n} |z_k| \underset{(\star)\text{ est une égalité}}{=} \sum_{k=1}^{n} |z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} \left|-\overline{u_k}(z-z_k)\right|\ .$$

D'après Q22, il existe des nombres réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $-\overline{u_k}(z-z_k)=-\lambda_k\overline{u_1}(z-z_1)$. Nous en déduisons :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|z_k|}_{\in\mathbb{R}_{>0}} \underset{\text{Q25}}{=} \sum_{k=1}^{n}-\overline{u_k}(z-z_k)=\sum_{k=1}^{n}-\lambda_k\overline{u_1}(z-z_1)=\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}-\lambda_k\right)}_{\in\mathbb{R}_{>0}}\left(-\overline{u_1}(z-z_1)\right).$$

Nous en déduisons que $-\overline{u_1}(z-z_1)\in\mathbb{R}_+$, puis que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $-\overline{u_k}(z-z_k)=\lambda_k\left(-\overline{u_1}(z-z_1)\right)\in\mathbb{R}_+$.

- *Cas où $z\in\{z_1,\dots,z_n\}$* Quitte à renuméroter les nombres complexes $z_1,\dots,z_n$, nous pouvons supposer que $z=z_1$. Les nombres complexes $-\overline{u_k}(z-z_k)$, où $k\in[\![2,n]\!]$, sont tous non nuls (hypothèse utile pour pouvoir appliquer Q22). Nous calculons :

$$\sum_{k=2}^{n}-\overline{u_k}(z_1-z_k)\underset{\text{Q25}}{=}\sum_{k=1}^{n}|z_k| \underset{(\star)\text{ est une égalité}}{=} \sum_{k=2}^{n}|z_1-z_k|=\sum_{k=2}^{n}\left|-\overline{u_k}(z_1-z_k)\right|.$$

D'après Q22, il existe des nombres réels positifs $\lambda_2,\dots,\lambda_n$ tels que, pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $-\overline{u_k}(z_1-z_k)=-\lambda_k\overline{u_2}(z_1-z_2)$. Nous en déduisons :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|z_k|}_{\in\mathbb{R}_{>0}} \underset{\text{Q25}}{=} \sum_{k=2}^{n}-\overline{u_k}(z_1-z_k)=\sum_{k=2}^{n}-\lambda_k\overline{u_2}(z_1-z_2)=\underbrace{\left(\sum_{k=2}^{n}-\lambda_k\right)}_{\in\mathbb{R}_{>0}}\left(-\overline{u_2}(z_1-z_2)\right).$$

Nous en déduisons que $-\overline{u_2}(z_1-z_2)\in\mathbb{R}_+$, puis que, pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $-\overline{u_k}(z_1-z_k)=\lambda_k\left(-\overline{u_2}(z_1-z_2)\right)\in\mathbb{R}_+$. Enfin, $-\overline{u_1}(z_1-z_1)=0\in\mathbb{R}_+$.

Q28 — Nous raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $z=0$ alors l'inégalité $(\star)$ est clairement une égalité.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $(\star)$ est une égalité. Démontrons que $z=0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc de plus que $z\neq 0$ et notons $B\neq O$ le point d'affixe z.

- Soit $k\in[\![1,n]\!]$. D'après Q27, $\lambda_k=\overline{u_k}(z-z_k)\in\mathbb{R}_-$. Nous en déduisons :

$$\underbrace{(\lambda_k+|z_k|)}_{\in\mathbb{R}}z_k=\underbrace{|z_k|}_{\in\mathbb{R}_{>0}}z.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA_k}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc colinéaires. Ainsi le point A_k appartient à la droite (OB) (qui est bien définie).

- D'après ce qui précède, les points $A_1,\dots,A_n$ appartiennent à la droite (OB), ce qui contredit l'hypothèse (iii).

Q29 — Commençons par rassembler quelques résultats obtenus, en leur apportant une interprétation géométrique.

- D'après Q26 et l'interprétation géométrique du module, nous déduisons que $\sum_{k=0}^{n}MA_k$ est minorée par $\sum_{k=1}^{n}|z_k|$, quand M décrit le plan $\mathscr{P}$.
- Comme $\sum_{k=0}^{n}MA_k$ égale $\sum_{k=1}^{n}|z_k|$ lorsque $M=O$, le minorant $\sum_{k=1}^{n}|z_k|$ est en fait un minimum, atteint pour $M=O$.
- D'après Q28 et l'interprétation géométrique du module, ce minimum $\sum_{k=1}^{n}|z_k|$ est uniquement atteint pour $M=O$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{lorsque le point } M \text{ décrit le plan } \mathscr{P},\ \sum_{k=0}^{n}MA_k \text{ admet un minimum atteint en un unique point, le point } M=O.}$$