Barème provisoire du Devoir Surveillé n°1
190 Points

- Questions de cours : Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q19, Q20.
- Questions voisines de celles traitées en classe : Q7, Q8, Q9, Q12, Q13, Q14, Q15, Q16, Q17, Q18
- Questions demandant une prise d'initiative : Q10, Q11, Q21–Q29

Exercice 1 (Parties paire et impaire d'une fonction)

Q1 — 9 point(s) — Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une unique fonction $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et une unique fonction $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = p(x) + i(x) .$$

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Raisonnement par analyse-synthèse structuré
- **3 point(s)** Analyse bien introduite en supposant l'existence de p et i
- **3 point(s)** Synthèse avec les trois conditions vérifiées
- **2 point(s)** Soin porté à la distinction entre fonction (f, p, i) et expression en x $(f(x), p(x), i(x))$

Exercice 2 (Calcul d'une somme trigonométrique)

Q2 — 12 point(s) — Énoncer les formules d'addition pour cosinus, sinus et tangente.

Détails sur l'attribution des points

- **1+1+4 point(s)** Variables toutes bien introduites avec attention portée pour tangente
- **2 point(s)** 2 formules d'addition pour cosinus
- **2 point(s)** 2 formules d'addition pour sinus
- **2 point(s)** 2 formules d'addition pour tangente

Q3 — 4 point(s) — Énoncer les formules de duplication pour cosinus et sinus.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Variable bien introduite
- **1 point(s)** Formule de duplication pour cosinus
- **1 point(s)** Formule de duplication pour sinus

Q4 — 4 point(s) — Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que $e^{i t_1} e^{i t_2} = e^{i(t_1+t_2)}$.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Calculs
- **1 point(s)** Indication de l'unicité de la forme algébrique
- **1 point(s)** Indication des formules d'addition au moment opportun
- **0 point(s)** Calcul sans aucun argument

Q5 — 2 point(s) — Énoncer la formule de Moivre.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Variables introduites
- **1 point(s)** Énoncé de la formule

Q6 — 4 point(s) — Démontrer la formule de Moivre.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Raisonnement par récurrence structuré
- **1 point(s)** Initialisation
- **2 point(s)** Hérédité avec mention de Q4 et de HR au moment opportun
- **0 point(s)** « Preuve » avec ...

Q7 — 14 point(s) — Soit $(x, y, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n(x, y) := \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx + y)$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Utilisation d'une formule de duplication
- **2 point(s)** Apparition de la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{i2kx}$
- **3 point(s)** Formule sommatoire avec disjonction de cas
- **1 point(s)** Valeur pour $x \equiv 0\ [\pi]$
- **3 point(s)** Technique de l'angle moitié
- **2 point(s)** Conclusion soignée
- **2 point(s)** Clarté des calculs

Exercice 3 (Équations trigonométriques) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) \qquad \cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Q8 — 6 point(s) — Résoudre l'équation (E_1).

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Mise en œuvre de la transformation de Fresnel
- **2 point(s)** Cas d'égalité des cosinus cité
- **2 point(s)** Écriture soignée de l'ensemble solution

Q9 — 4 point(s) — Résoudre l'équation (E_2).

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Mention de la relation de Pythagore
- **2 point(s)** Écriture soignée de l'ensemble solution

Q10 — 10 point(s) — Résoudre l'équation (E_n) lorsque $n \geqslant 4$ est un entier pair.

Détails sur l'attribution des points

- **3 point(s)** Prise d'initiative pertinente
- **1 point(s)** Écriture soignée de l'ensemble solution
- **0 point(s)** Solution non argumentée

Q11 — 10 point(s) — Résoudre l'équation (E_n) lorsque $n \geqslant 3$ est un entier impair.

Détails sur l'attribution des points

- **3 point(s)** Prise d'initiative pertinente
- **1 point(s)** Écriture soignée de l'ensemble solution
- **0 point(s)** Solution non argumentée

Exercice 4 (Expressions de $\sin(3x)$ où $x \in \mathbb{R}$) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Q12 — 4 point(s) — Exprimer $\sin(3x)$ comme un polynôme en $\sin(x)$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** $\sin(3x) = \sin(2x + x)$
- **1 point(s)** Indication d'une formule d'addition
- **1 point(s)** Indication d'une formule de duplication
- **1 point(s)** Indication de la relation de Pythagore
- **0 point(s)** Calcul sans aucun argument ou avec une erreur de calcul

Q13 — 4 point(s) — Démontrer que $\sin(3x) = 4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Valeurs remarquables de cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$
- **1 point(s)** Indication de formules d'addition
- **1 point(s)** Indication de la relation de Pythagore
- **1 point(s)** Lien avec Q12
- **0 point(s)** Calcul sans aucun argument ou avec une erreur de calcul

Exercice 5 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Q14 — 6 point(s) — On pose $j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Calcul de j^0, j^1, j^2, j^3
- **2 point(s)** Conjecture avec distinction des cas suivant le reste de la division euclidienne de p par 3
- **3 point(s)** Démonstration de la conjecture avec la formule de Moivre

Q15 — 2 point(s) — Calculer $1 + j + j^2$.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Solutions avec un formule sommatoire ou par un calcul direct recevables
- **0 point(s)** Calcul avec une erreur de calcul

Q16 — 3 point(s) — Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $(z-1)(z-j)\left(z-j^2\right)$.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Le calcul est quelque peu détaillé et est juste
- **1 point(s)** Indication de Q14 et Q15
- **0 point(s)** Calcul avec une erreur de calcul ou non détaillé

Q17 — 4 point(s) — En déduire l'ensemble solution de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Structure logique de la résolution
- **1 point(s)** Indication de Q16
- **1 point(s)** $\mathbb{C}$ est intègre
- **1 point(s)** Écriture soigné de l'ensemble solution

Q18 — 13 point(s) — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs complexes définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_1 \in \mathbb{C}$, $u_2 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence $u_{n+3} = u_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$\exists!\,(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^3 \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \lambda_0+\lambda_1 j^n+\lambda_2 j^{2n}\,.$$

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Raisonnement par analyse-synthèse structuré
- **1 point(s)** Analyse bien introduite en supposant l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$
- **5 point(s)** Résolution du système linéaire de l'analyse avec logique juste
- **5 point(s)** Hérédité avec une récurrence à trois pas

EXERCICE 6 (POINT DE FERMAT)

Q19 — 5 point(s) — Énoncer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Variables introduites
- **4 point(s)** Énoncé des deux inégalités

Q20 — 7 point(s) — Soit $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Preuve par double indication indiquée et structurée
- **2 point(s)** Sens réciproque facile
- **4 point(s)** Sens direct bien argumenté

Q21 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Raisonnement par récurrence structuré
- **1 point(s)** Initialisation
- **2 point(s)** Hérédité avec mention de Q19 et de HR au moment opportun
- **0 point(s)** « Preuve » avec …

Q22 — 10 point(s) — Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout n-uplet $(z_1,\ldots,z_n)$ de complexes tous non nuls, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ si et seulement s'il existe un n-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de réels strictement positifs tel que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $z_k = \lambda_k z_1$.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Raisonnements par récurrence et double implication structurés
- **2 point(s)** Initialisation en citant Q20
- **2 point(s)** Hérédité avec mention de HR au moment opportun
- **4 point(s)** Clarté de la solution

Q23 — 5 point(s) — Interpréter le résultat de la question précédente en termes d'arguments.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Énoncé du résultat
- **3 point(s)** Qualité de l'argumentation
- **0 point(s)** Réponse non argumentée

Dans la suite, on se place dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit $n\geqslant 3$ un entier. On considère n points $A_1,\ldots,A_n$ du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives $z_1,\ldots,z_n$ tels que :

(i) pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, A_k est distinct de l'origine O ;
(ii) les point $A_1,\ldots,A_n$ sont deux-à-deux distincts ;

(iii) il n'existe aucune droite du plan $\mathscr{P}$ contenant tous les points $A_1, \dots, A_n$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

Q24 — 2 point(s) — Donner un exemple de n-uplet $(z_1, \dots, z_n)$ satisfaisant l'égalité (iv) lorsque $n = 4$.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** 0, 1 ou 2 point(s) suivant la qualité de la justification que l'exemple convient

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $u_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$. On considère un point M d'affixe z.

Q25 — 4 point(s) — Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,(z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Manipulation du symbole $\sum$
- **1 point(s)** Mention de l'hypothèse (iv)
- **1 point(s)** $|z|^2 = z\,\overline{z}$
- **0 point(s)** Le calcul est confus ou non argumenté et tend vers l'arnaque

Q26 — 6 point(s) — En déduire l'inégalité :

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| \; .$$

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Multiplicativité du module
- **1 point(s)** $u_1, \dots, u_n$ sont de module 1
- **1 point(s)** Indication de Q25
- **3 point(s)** Clarté et justesse du calcul
- **0 point(s)** Calcul sans aucun argument

Q27 — 12 point(s) — Démontrer que l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{u_k}\,(z - z_k)$ est un réel négatif.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Structuration de la réponse par double implication
- **2 point(s)** Sens réciproque facile
- **6 point(s)** Sens direct avec mention de Q22 (pas de pénalité si le cas où z est l'un des $z_1, \dots, z_n$).
- **3 point(s)** Clarté et justesse de l'argumentation

Q28 — 14 point(s) — En déduire que l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si $z = 0$.

Détails sur l'attribution des points

- **1 point(s)** Structuration de la réponse par double implication
- **1 point(s)** Sens réciproque facile
- **8 point(s)** Sens direct avec mention de (iii)
- **2 point(s)** Clarté et justesse de l'argumentation

Q29 — 6 point(s) — Établir que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un unique point M du plan que l'on précisera.

Détails sur l'attribution des points

- **2 point(s)** Formulation précise de la réponse
- **4 point(s)** Qualité des explications et liens avec certaines questions précédentes, précisément indiquées.
- **0 point(s)** Explications vagues ou confuses pour tenter de grappiller quelques points.