Un corrigé du Devoir Libre n°10

Q1 — Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Démontrer que
$$\alpha\mathbb{Z} := \{\alpha \cdot n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$$
est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Comme $0 = \alpha \cdot 0 \in \alpha\mathbb{Z}$, $\alpha\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\alpha\mathbb{Z}$. Démontrons que $x_1 - x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$. Comme $x_1 \in \alpha\mathbb{Z}$ et $x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$, il existe des entiers n_1 et n_2 tels que $x_1 = \alpha \cdot n_1$ et $x_2 = \alpha \cdot n_2$. Ainsi
$$x_1 - x_2 = \alpha \cdot (n_1 - n_2)\ .$$
Puisque $n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1 - x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$.
Nous avons établi que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Il reste à démontrer que $\alpha\mathbb{Z}$ n'est pas une partie dense dans $\mathbb{R}$.
Supposons que $\alpha\mathbb{Z} \cap \left]0, \frac{\alpha}{2}\right[\neq \emptyset$. Alors il existe un entier n tel que
$$0 < \alpha \cdot n < \frac{\alpha}{2}\ .$$
Comme $\alpha > 0$, nous en déduisons $0 < n < \frac{1}{2}$ ce qui contredit le caractère entier de $\mathbb{Z}$. Ainsi $\alpha\mathbb{Z} \cap \left]0, \frac{\alpha}{2}\right[= \emptyset$.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$. On pose
$$H_{>0} := \{h \in H \,:\, h > 0\}\ .$$

Q2 — Justifier que $\alpha := \inf(H_{>0})$ est un nombre réel bien défini.

Comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$, H contient un élément h_0 non nul.
Si $h_0 > 0$ alors $H_{>0}$ contient h_0 et donc est non vide.
Si $h_0 < 0$ alors $-h_0 > 0$ et, comme H est stable par passage à l'opposé, $-h_0 \in H$. Ainsi $H_{>0}$ contient $-h_0$ et donc est non vide.
Dans tous les cas, $H_{>0}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est minorée (par 0). D'après la propriété de la borne inférieure, $\alpha := \inf(H_{>0})$ est un nombre réel bien défini.

Q3 — On suppose que $\alpha \in H_{>0}$. Démontrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

Nous raisonnons par double inclusion.
Soit $x \in \alpha\mathbb{Z}$. Alors il existe un entier n tel que $x = \alpha \cdot n$.

- Si $n = 0$ alors $x = 0$ appartient à H (un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ contient 0).
- Si $n \geqslant 1$ alors
$$\alpha \cdot n = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{n \text{ termes}}$$
appartient à H car $\alpha \in H$ et H est stable par somme.
- Si $n \leqslant -1$ alors
$$\alpha \cdot n = \underbrace{(-\alpha) + (-\alpha) + \ldots + (-\alpha)}_{-n \text{ termes}}$$
appartient à H car $\alpha \in H$ et H est stable par passage à l'opposé et par somme.

Dans tous les cas $x \in H$.
Soit $x \in H$. Comme $\alpha > 0$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, \alpha[$ (uniques) tels que $x = \alpha \cdot q + r$ d'où

$$r = x - \alpha \cdot q\,.$$

Comme $x \in H$, $q \cdot \alpha \in H$ (d'après l'inclusion déjà prouvée) et H est stable par somme tordue, $r \in H$. Si $r \neq 0$ alors $r \in H_{>0}$ et $r < \alpha$, ce qui n'est pas. Ainsi $r = 0$ et $x = \alpha \cdot q \in \alpha\mathbb{Z}$.

Q4 — On suppose que $\alpha \notin H_{>0}$. Démontrer que $\alpha = 0$, puis que H est une partie de $\mathbb{R}$ dense de $\mathbb{R}$.

Démontrons que $\alpha = 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc $\alpha \neq 0$.
Comme 0 minore $H_{>0}$, $0 \leqslant \alpha$. Cette inégalité est stricte d'après l'hypothèse faite, i.e. $\alpha > 0$.
Le nombre réel $\dfrac{3\alpha}{2}$ est strictement plus grand que α, puisque $\alpha > 0$. Ainsi, il existe $h_1 \in H_{>0}$ tel que

$$\alpha \leqslant h_1 < \frac{3\alpha}{2}\,.$$

Puis que $\alpha \notin H_{>0}$, $h_1 \neq \alpha$ et donc $\alpha < h_1$. Nous en déduisons qu'il existe $h_2 \in H_{>0}$ tel que

$$(\star) \qquad \alpha \leqslant h_2 < h_1 < \frac{3\alpha}{2}\,.$$

Ainsi, l'élément $h := h_1 - h_2$ appartient à H (stabilité par somme tordue) et est strictement positif. Il appartient donc à $H_{>0}$. D'après $(\star)$, $h \leqslant \dfrac{\alpha}{2} < \alpha$. D'où une contradiction.
Démontrons que H est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme $b - a > 0 = \inf(H_{>0})$, il existe $h_0 \in H_{>0}$ tel que

$$h_0 < b - a\,.$$

Comme $h_0 > 0$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, h_0[$ (uniques) tels que

$$(\star\star) \qquad a = q \cdot h_0 + r\,.$$

Comme en **Q3**, nous démontrons que $h := (q+1) \cdot h_0 \in H$. D'après $(\star)$ et $0 \leqslant r < h_0 < b - a$

$$a = q \cdot h_0 + r < \underbrace{q \cdot h_0 + h_0}_{h} < q \cdot h_0 + b - a \leqslant q \cdot h_0 + r + b - a = a + b - a = b\,.$$

Ainsi $h \in H \cap]a, b[$.

Nous avons établi que si H est un sous-groupe non trivial de $(\mathbb{R}, +)$ alors

- *soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$ (H est alors dit monogène);*
- *soit H est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.*

On rappelle que π est un nombre irrationnel.

Q5 — Démontrer que

$$\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} := \left\{ n + 2 \cdot \pi \cdot m \,:\, (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Le nombre $0 = 0 + 2 \cdot \pi \cdot 0$ appartient à $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Démontrons que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est stable par somme tordue.
Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Alors il existe des entiers n_1, m_1, n_2, m_2 tels que $x_1 = n_1 + 2 \cdot \pi \cdot m_1$ et $x_2 = n_2 + 2 \cdot \pi \cdot m_2$ de sorte que

$$x_1 - x_2 = (n_1 - n_2) + 2 \cdot \pi \cdot (m_1 - m_2)\,.$$

Comme $n_1 - n_2$ et $m_1 - m_2$ sont entiers, $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.
Nous avons démontré que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (non trivial). D'après l'étude précédente, nous saurons que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ s'il n'existe aucun $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. Nous établissons cette dernière propriété en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. Comme $1 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(\star) \qquad 1 = \alpha \cdot q\,.$$

Comme $2 \cdot \pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(\star\star) \qquad 2 \cdot \pi = \alpha \cdot p\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons $(q \neq 0)$ $\pi = \dfrac{p}{2 \cdot q} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas.

Q6 — Soit $(x, y) \in [-1, 1]^2$ tel que $x < y$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x < \cos(n) < y$.

Comme la fonction Arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$, $\mathrm{Arccos}(y) < \mathrm{Arccos}(x)$. D'après **Q5**, il existe $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$0 \leqslant \mathrm{Arccos}(y) < n + 2 \cdot \pi \cdot m < \mathrm{Arccos}(x) \leqslant \pi\,.$$

Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, il vient

$$x = \cos(\mathrm{Arccos}(x)) < \cos(n + 2 \cdot \pi \cdot m) < \cos\big(\mathrm{Arccos}(y)\big) = y\,.$$

Comme cos est 2π-périodique et paire, $\cos(n + 2 \cdot \pi \cdot m) = \cos(|n|)$ et donc

$$x = \cos(\mathrm{Arccos}(x)) < \cos(|n|) < \cos\big(\mathrm{Arccos}(y)\big) = y\,.$$