# CHAPITRE N°10
# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

**C10.1. NOTATION** La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## § 1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

**C10.2. DÉFINITION (EDL1)** Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL1) est une équation de la forme :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$$

où $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ avec $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si le second membre de $(E)$ est nul, i.e. si $b$ est la fonction nulle sur $I$, alors l'EDL1 $(E)$ est dite homogène (EDLH1).

**C10.3. DÉFINITION (SOLUTION D'UNE EDL1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

1. Une solution de $(E)$ sur $I$ est une <u>fonction</u> $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que :

$$\forall\, x \in I \qquad y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)\,.$$

2. L'ensemble solution de $(E)$ sur $I$ est :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \left\{ y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}) \,:\, \forall\, x \in I \quad y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \right\} \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

**C10.4. DÉFINITION (EDLH1 ASSOCIÉE À UNE EDL1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

L'EDLH1 associée à $(E)$ est :

$$(EH) \quad y' + a(x)\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

**C10.5. EXERCICE** Soit l'EDL1 :

$$(E) \quad y' - \frac{1}{x}\,y = x \quad , \quad I = ]0, +\infty[\,.$$

Expliciter l'EDLH1 $(EH)$ associée à $(E)$ et donner une solution de $(EH)$ sur $]0, +\infty[$ puis une solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$.

**C10.6. DÉFINITION (COURBE INTÉGRALE D'UNE EDL1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

Une courbe intégrale de $(E)$ est une courbe représentative d'une solution de $(E)$, dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**C10.7. Remarque** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}) .$$

Considérons une solution $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_y$ dans un repère orthonormé du plan, qui est par définition une courbe intégrale de $(E)$. Alors pour tout $x \in I$ :

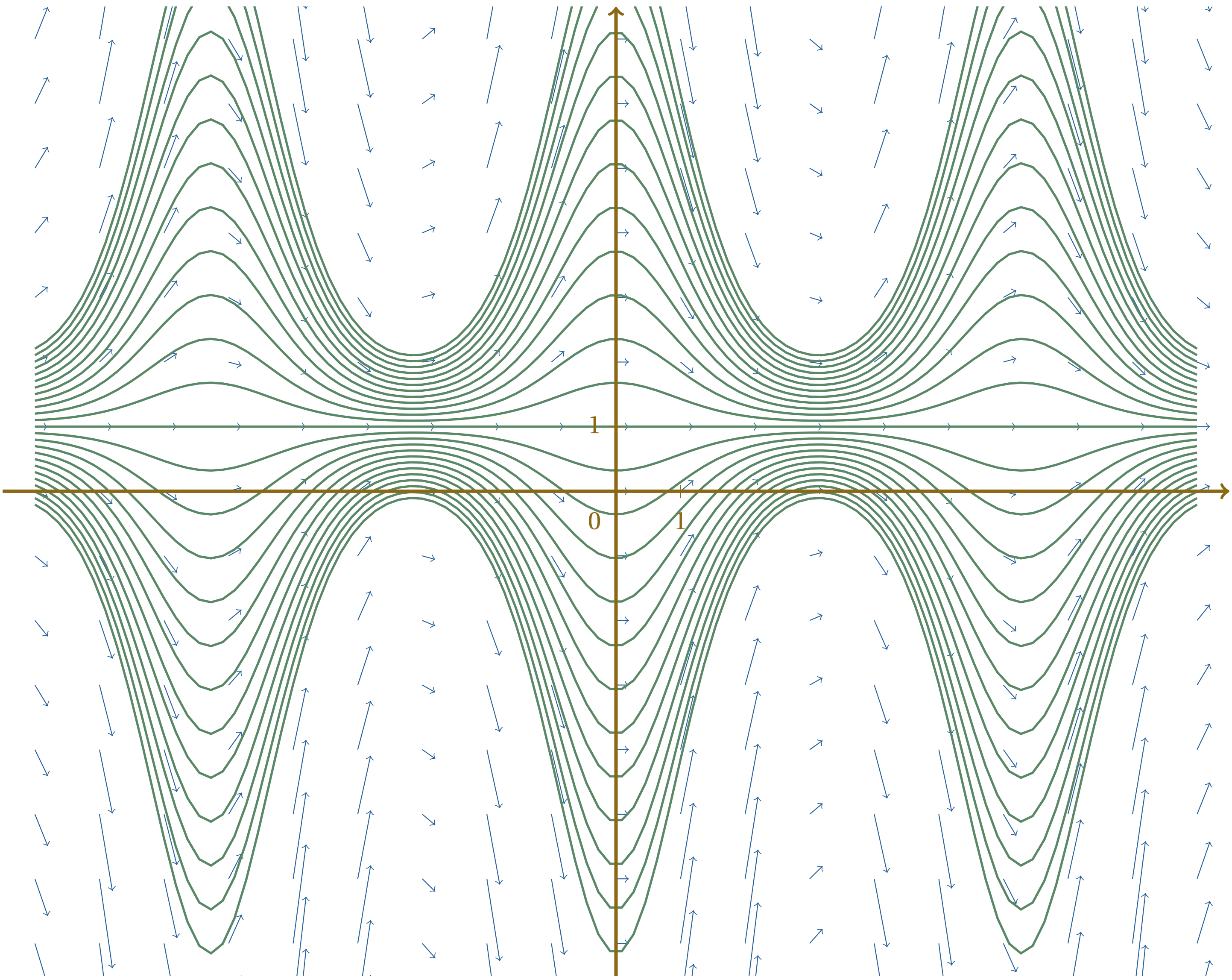
> la tangente à $\mathscr{C}_y$ au point de coordonnées $(x, y(x))$ a pour pente $y'(x) = -a(x)y(x)+b(x)$ donc le vecteur de coordonnées $(1, -a(x)y(x)+b(x))$ en est un vecteur directeur.

On peut donc en traçant le champ de vecteurs :

$$\left|\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (1, -a(x)y + b(x)) \end{array}\right.$$

avoir une intuition géométrique des courbes intégrales de $(E)$. En effet, les courbes intégrales épousent le champ de vecteurs.

**C10.8. Champ de vecteurs et courbes intégrales de $y' + \sin(x)\,y = \sin(x)$ , $I = \mathbb{R}$**



**C10.9. Exercice** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et l'EDLH1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})\,.$$

1. Donner une solution « évidente » de $(E)$ sur $I$.
2. Justifier l'existence d'une primitive $A$ de $a$ sur $I$, donner une expression intégrale de $A$.
3. Déterminer une solution de $(E)$ sur $I$ qui ne s'annule pas sur $I$.

**C10.10. Définition (ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre finie de fonctions)**
Soient $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left(f_1,\ldots,f_n\right) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \;:\; (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \subset \mathbb{K}^A}$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des fonctions $f_1, \ldots, f_n$.

**C10.11. Exercice** Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{K}^A$. Décrire $\mathrm{Vect}\left(f\right)$ à l'aide d'une phrase.

**C10.12. Exercice** On considère les trois fonctions suivantes.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

La fonction $g$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}\left(f_1, f_2\right)$ ?

**C10.13. Exercice** On considère les trois fonctions suivantes.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^3(x) \end{array} \right.$$

La fonction $g$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}\left(f_1, f_2\right)$ ?

**C10.14. Théorème (ensemble solution d'une EDLH1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et l'EDLH1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})\,.$$

La fonction $a$ possède une primitive $A$ sur $I$ et :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & k\,e^{-A(x)} \end{array} \right. \;:\; k \in \mathbb{K} \right\} =: \underbrace{\mathrm{Vect}\left( y_H \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-A(x)} \end{array} \right. \right)}_{\text{ensemble des multiples de la fonction } y_H}\,.$$

**C10.15. Exercice** Résoudre les trois EDLH1 suivantes.

1. $(E_1) \quad y' + 2\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. $(E_2) \quad y' + \dfrac{x}{1+x^2}\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
3. $(E_3) \quad y' + \dfrac{x}{x+1}\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(]-\infty,-1[,\mathbb{R})$

### C10.16. Exercice

1. Déterminer les fonctions $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ vérifiant $y' = 0$.
2. Déterminer les fonctions $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R})$ vérifiant $y' = 0$.
3. Qu'en déduire ?

### C10.17. Exercice (un problème de recollement)

1. Déterminer les fonctions $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $x\,y' - y = 0$.
2. Qu'en déduire ?

**C10.18. Proposition (principe de superposition pour une EDL1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b_1, b_2) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^3$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et les deux EDL1 :

$$(E_1) \quad y' + a(x)\,y = b_1(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}) \qquad\qquad (E_2) \quad y' + a(x)\,y = b_2(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

Si $y_1$ est une solution de $(E_1)$ et $y_2$ est une solution de $(E_2)$ alors la fonction :

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \ \left|\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \end{array}\right.$$

est une solution de l'EDL1 :

$$(E_3) \quad y' + a(x)\,y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

Démonstration

- La fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ comme combinaison linéaire de telles fonctions.
- Soit $x \in I$. Nous calculons :

$$\begin{array}{cll} & (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'(x) + a(x)\,(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(x) & \\ = & (\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2')(x) + a(x)\,(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) & [\text{dérivation linéaire et évaluation}] \\ = & \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + a(x)\lambda_1 y_1(x) + a(x)\lambda_2 y_2(x) & [\text{évaluation et développement}] \\ = & \lambda_1 \left(y_1'(x) + a(x)\,y_1(x)\right) + \lambda_2 \left(y_2'(x) + a(x)\,y_2(x)\right) & [\text{regroupement et factorisation}] \\ = & \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x) & [y_1 \text{ solution de } (E_1),\ y_2 \text{ solution de } (E_2)] \end{array}$$

**C10.19. Théorème (description de l'ensemble solution d'une EDL1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})\,.$$

Soients :

- $A$ une primitive de $a$ sur $I$ (qui existe d'après le théorème fondamental de l'analyse) ;
- $y_p$ une solution particulière de $(E)$ sur $I$ (qui existe d'après la méthode de la variation de la constante, cf. C10.21).

Alors :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \left\{ \ \left|\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y_p(x) + k\,e^{-A(x)} \end{array}\right. \ : \ k \in \mathbb{K} \right\} =: y_p + \mathrm{Vect}\left( y_H \ \left|\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-A(x)} \end{array}\right. \right)\,.$$

**C10.20. Exercice** Résoudre les deux EDL1 suivantes.

1. $(E_1)\quad y'+5\,y=t \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$
2. $(E_2)\quad y'-\dfrac{2}{t}\,y=t^2 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

**C10.21. Méthode de la variation de la constante.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$ et l'EDL1 :

$$(E)\quad y'+a(x)\,y=b(x) \quad , \quad \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})\,.$$

Supposons déterminée une fonction $y_H\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sol}_{(EH),I}=\mathrm{Vect}\left(y_H\right)$. Alors, $y_H$ ne s'annnule pas sur $I$ et on peut déterminer une solution particulière $y_p$ de $(E)$ sur $I$ sous la forme :

$$\boxed{y_p \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & k(x)\,y_H(x) \end{array} \right. \quad \text{où } k\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})}$$

en primitivant la fonction $x\longmapsto \dfrac{b(x)}{y_H(x)}$.

**C10.22. Exercice** Résoudre les EDL1 suivantes.

$(E_1)\quad y'-\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)y=1 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

$(E_2)\quad y'-y=x^k e^x \quad (k\in\mathbb{N}) \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$(E_3)\quad x\left(1+\ln^2(x)\right)y'+2\ln(x)\,y=1 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

$(E_4)\quad y'-4\,y=2\,e^x \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$(E_5)\quad y'-\tan(x)\,y=\sin(x) \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1\left(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right)$

$(E_6)\quad y'=\dfrac{y}{x}+x \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

$(E_7)\quad x^2\,y'-(2x-1)\,y=x^2 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

$(E_8)\quad y'-2\,y=2x \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$(E_9)\quad y'=\dfrac{y+1}{x} \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

$(E_{10})\quad (x+1)\,y'-x\,y+1=0 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$

**C10.23. Remarque** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$, $x_0\in I$ et l'EDL1 :

$$(E)\quad y'+a(x)\,y=b(x) \quad , \quad y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})\,.$$

D'après C10.14, C10.19 et C10.21 une fonction $y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ est solution de $(E)$ si et seulement si :

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{K} \quad \forall x \in I \quad y(x) = \left(k + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\right)}\,\mathrm{d}t\right) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

**C10.24. Théorème (de Cauchy pour les EDL1)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K});.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy :

$$(P) \quad \left| \begin{array}{rcl} y' + a(x)\,y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad \text{(condition initiale)}$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ possède une unique solution.

**C10.25. Exercice** Résoudre l'EDL1 :

$$(E) \quad \left(x^2+1\right) y' + 2x\,y = 3x^2 + 1 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$$

tracer des courbes intégrales, puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 3$.

**C10.26. Exercice** Résoudre l'EDL1 :

$$(E) \quad \sin(x)\,y' - \cos(x)\,y + 1 = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(]0,\pi[,\mathbb{R})$$

tracer des courbes intégrales, puis déterminer la solution vérifiant $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.

**C10.27. Exercice** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathscr{C}^0\left([0,+\infty[,\mathbb{R}\right)$ et l'EDLH1 :

$$(EH) \quad y' + a(x)\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\,.$$

Soit $y$ une solution de $(EH)$. Démontrer que :

$$\left(y \text{ est la fonction nulle sur } I\right) \quad \text{ou} \quad \left(y \text{ garde un signe constant sur } I\right).$$

**C10.28. Exercice** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})^2$ et l'EDL1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\,.$$

On suppose qu'il existe une solution $y_p$ de $(E)$ telle que $y_p(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Soit $y$ une solution de $(E)$.

1. Que dire de $y$ si $y(0) = y_p(0)$ ?
2. On suppose que $y(0) > y_p(0)$. Démontrer que $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

**C10.29. Exercice** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})^2$ et l'EDL1 :

$$(E)\quad y'+a(x)\,y=b(x)\quad,\quad y\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})\,.$$

1. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux courbes intégrales de $(E)$. Démontrer :

$$\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2=\emptyset\quad\text{ou}\quad\mathscr{C}_1=\mathscr{C}_2\,.$$

2. Démontrer que les courbes intégrales de $(E)$ forment une partition de la partie $I\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$, i.e. que :

$$\bigsqcup_{y\in\mathrm{Sol}_{(E),I}}\mathscr{C}_y=I\times\mathbb{R}\,.$$

## § 2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

**C10.30. Définition (fonctions linéairement indépendantes)** Soient $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(f_1,\dots,f_n)\in\left(\mathbb{K}^A\right)^n$. Les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont dites linéairement indépendantes si :

$$\boxed{\forall\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\quad\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k=0\implies(\forall\,k\in[\![1,n]\!]\quad\lambda_k=0)\,.}$$

Si les fonctions $f_1,\dots,f_n$ ne sont pas linéairement indépendantes, on dit qu'elles sont liées.

**C10.31. Exercice** Démontrer que les fonctions :

$$f_1\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\x&\longmapsto&e^x\end{array}\right.\qquad f_2\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\x&\longmapsto&e^{2x}\end{array}\right.\qquad g\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\x&\longmapsto&e^{3x}\end{array}\right.$$

sont linéairement indépendantes.

**C10.32. Exercice** Soient $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(f_1,\dots,f_n)\in\left(\mathbb{K}^A\right)^n$. Démontrer que les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont liées si et seulement si une des fonctions $f_1,\dots,f_n$ est combinaison linéaire des autres.

**C10.33. Exercice** Soient $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $(f,g)\in\left(\mathbb{K}^A\right)^2$. Les fonctions $f,g,f+g$ sont-elles linéairement indépendantes ou liées ?

**C10.34. Exercice** Justifier que les fonctions :

$$f_1\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\x&\longmapsto&e^{ix}\end{array}\right.\qquad f_2\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\x&\longmapsto&e^{-ix}\end{array}\right.\qquad g\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\x&\longmapsto&\sin(x)\end{array}\right.$$

sont liées.

**C10.35. Définition (EDLCC2)** Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (EDLCC2) est une équation de la forme :

$$(E)\quad y''+a\,y'+b\,y=f(x)\quad,\quad I$$

où $(a,b)\in\mathbb{K}^2$, $f\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ avec $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si le second membre de $(E)$ est nul, i.e. si $f$ est la fonction nulle sur $I$, alors l'EDLCC2 $(E)$ est dite homogène (EDLCCH2).

**C10.36. DÉFINITION (SOLUTION D'UNE EDLCC2)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et l'EDLCC2 :

$$(E) \quad y'' + a\,y' + b\,y = f(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

1. Une solution de $(E)$ sur $I$ est une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall\, x \in I \qquad y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)\,.$$

2. L'ensemble solution de $(E)$ sur $I$ est :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \left\{y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K}) \;:\; \forall\, x \in I \quad y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)\right\} \subset \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

**C10.37. DÉFINITION (EDLCCH2 ASSOCIÉE À UNE EDLCC2)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et l'EDLCC2 :

$$(E) \quad y'' + a\,y' + b\,y = f(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

L'EDLCCH2 associée à $(E)$ est :

$$(EH) \quad y'' + a\,y' + b\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

**C10.38. EXERCICE** Soit l'EDLCC2 :

$$(E) \quad y'' - y = x \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

Expliciter l'EDLCCH2 $(EH)$ associée à $(E)$ et donner une solution de $(EH)$ puis une solution de $(E)$.

**C10.39. EXERCICE**

1. Donner deux solutions linéairement indépendantes de l'EDLCCH2 :

$$(E_1) \quad y'' + y' + y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\,.$$

2. Donner deux solutions linéairement indépendantes de l'EDLCCH2 :

$$(E_2) \quad y'' + y' + y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

**C10.40. PROPOSITION (PRINCIPE DE SUPERPOSITION POUR UNE EDLCC2)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $(f_1,f_2) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$, $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et les deux EDLCC2 :

$$(E_1) \quad y'' + a\,y' + b\,y = f_1(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K}) \qquad\qquad (E_2) \quad y'' + a\,y' + b\,y = f_2(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

Si $y_1$ est une solution de $(E_1)$ et $y_2$ est une solution de $(E_2)$ alors la fonction :

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \;\left|\; \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \end{array}\right.$$

est une solution de l'EDLCC2 :

$$(E_3) \quad y'' + a\,y' + b\,y = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

**C10.41. Corollaire (combinaison linéaire de deux solutions d'une même EDLCCH2)** Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions d'une même EDLCCH2 $(EH)$, alors toute combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$ est encore solution de $(EH)$.

**C10.42. Lemme (clé pour la résolution des EDLCCH2, cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et l'EDLCCH2 :

$$(E_2H)\quad y''+a\,y'+b\,y=0\quad,\quad y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{C})\,.$$

1. Soit $r\in\mathbb{C}$ tel que $r^2+ar+b=0$. Alors la fonction suivante :

$$y\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & e^{rx}\end{array}\right.$$

   est solution de $(EH)$.

2. Si $y\colon I\longrightarrow\mathbb{C}$ est une solution de $(EH)$, alors la fonction

$$z\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & y(x)\,e^{-rx}\end{array}\right.$$

   est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$ et sa dérivée $z'$ est solution de l'EDLH1 :

$$(E_2H)\quad u'+(2r+a)\,u=0\quad,\quad u\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})\,.$$

**C10.43. Théorème (ensemble solution d'une EDLCCH2, cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et l'EDLCCH2 :

$$(E_2H)\quad y''+a\,y'+b\,y=0\quad,\quad y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{C})\,.$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(E_{\text{car}})\quad z^2+a\,z+b=0\quad,\quad z\in\mathbb{C}\,.$$

1. *Cas où* $\Delta=a^2-4b\neq 0$ L'équation $(E_{\text{car}})$ possède deux solutions complexes distinctes $r_1,r_2$, les fonctions :

$$y_1\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & e^{r_1x}\end{array}\right.\qquad\qquad y_2\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & e^{r_1x}\end{array}\right.$$

   sont linéairement indépendantes et :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I}=\mathrm{Vect}\left(y_1,y_2\right)=\left\{\ \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & \lambda_1\,e^{r_1x}+\lambda_2\,e^{r_2x}\end{array}\right.\ :\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

2. *Cas où* $\Delta=a^2-4b=0$ L'équation $(E_{\text{car}})$ possède une unique solution complexe $r=-\dfrac{a}{2}$, les fonctions :

$$y_1\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & e^{rx}\end{array}\right.\qquad\qquad y_2\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & x\,e^{rx}\end{array}\right.$$

   sont linéairement indépendantes et :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I}=\mathrm{Vect}\left(y_1,y_2\right)=\left\{\ \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & \lambda_1\,e^{rx}+\lambda_2\,x\,e^{rx}\end{array}\right.\ :\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

**C10.44. EXERCICE** Résoudre les EDLCCH2 suivantes.

1. $(E_1) \quad y'' + 4\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
2. $(E_2) \quad y'' + 2\,y' + y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
3. $(E_3) \quad y'' + i\,y' - y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**C10.45. THÉORÈME (ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLCCH2, CAS $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'EDLCCH2 :

$$(E_2H) \quad y'' + a\,y' + b\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}) .$$

L'équation caractéristique associée est :

$$(E_{\mathrm{car}}) \quad z^2 + a\,z + b = 0 \quad , \quad z \in \mathbb{C} .$$

1. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b > 0$ L'équation $(E_{\mathrm{car}})$ possède deux solutions réelles distinctes $r_1, r_2$, les fonctions :

$$y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{r_1 x} \end{array} \right. \qquad\qquad y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{r_1 x} \end{array} \right.$$

sont linéairement indépendantes et :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \mathrm{Vect}\left(y_1, y_2\right) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda_1\, e^{r_1 x} + \lambda_2\, e^{r_2 x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

2. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b = 0$ L'équation $(E_{\mathrm{car}})$ possède une unique solution réelle $r = -\dfrac{a}{2}$, les fonctions :

$$y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{r x} \end{array} \right. \qquad\qquad y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\, e^{r x} \end{array} \right.$$

sont linéairement indépendantes et :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \mathrm{Vect}\left(y_1, y_2\right) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda_1\, e^{r x} + \lambda_2\, x\, e^{r x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

3. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b < 0$ L'équation $(E_{\mathrm{car}})$ possède deux solutions distinctes complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$, où $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions :

$$y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \cos(\omega x) \end{array} \right. \qquad\qquad y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \sin(\omega x) \end{array} \right.$$

sont linéairement indépendantes et :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \mathrm{Vect}\left(y_1, y_2\right) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda_1\, e^{\alpha x} \cos(\omega x) + \lambda_2\, e^{\alpha x} \sin(\omega x) \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

**C10.46. EXERCICE** Soient $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$ et les fonctions :

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \cos(\omega x) \end{array} \right. \qquad\qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \sin(\omega x) \end{array} \right. .$$

Démontrer qu'il existe $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\mathrm{Vect}\left(y_1, y_2\right) = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\, e^{\alpha x} \cos(\omega x + \varphi) \end{array} \right. : (A, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \right\} .$$

**C10.47. Exercice** Résoudre les EDLCCH2 suivantes.

1. $(E_1)\quad y''-2\,y'-y=0 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. $(E_2)\quad y''-2\,y'+y=0 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
3. $(E_3)\quad y''-2\,y'+5y=0 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

**C10.48. Exercice (oscillateur harmonique amorti)** Soient $\omega_0\in\mathbb{R}_{>0}$ (pulsation propre) et $Q\in\mathbb{R}_{>0}$ (facteur de qualité). Résoudre l'EDLCCH2 :

$$(E)\quad x''+\frac{\omega_0}{Q}\,x'+\omega_0^2\,x=0 \quad , \quad x\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

en distinguant plusieurs cas (ou régimes) en cours d'étude.

**C10.49. Théorème (description de l'ensemble solution d'une EDLCC2)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathbb{K}^2$, $f\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et l'EDLCC2 :

$$(E)\quad y''+a\,y'+b\,y=f(x) \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

Supposons connue une solution particulière $y_p$ de $(E)$. Alors :

$$\mathrm{Sol}_{(E),I}=\left\{y_p+y_H\ :\ y_H\in\mathrm{Sol}_{(EH),I}\right\}=\left\{\ \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & y_p(x)+y_H(x)\end{array}\right.\ :\ y_H\in\mathrm{Sol}_{(EH),I}\right\}=:y_p+\mathrm{Sol}_{(EH),I}\,.$$

**C10.50. Exercice** Résoudre les EDLCC2 suivantes.

1. $(E_1)\quad y''+3\,y'-y=x^3 \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. $(E_2)\quad y''-y=e^{3x} \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
3. $(E_3)\quad y''-y=e^{x} \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

**C10.51. Proposition (EDLCC2 avec second membre en « polynôme-exponentielle »)**
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathbb{K}^2$, $A\colon I\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction polynomiale de degré $d\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{K}$ et l'EDLCC2 :

$$\boxed{(E)\quad y''+a\,y'+b\,y=A(x)\,e^{\lambda x} \quad , \quad y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})}$$

d'équation caractéristique :

$$(E_{\mathrm{car}})\quad z^2+a\,z+b=0 \quad , \quad z\in\mathbb{C}\,.$$

1. *Cas où $\lambda$ n'est pas racine de $(E_{car})$* Alors $(E)$ possède une solution particulière de la forme :
$$x\longmapsto B(x)\,e^{\lambda x} \quad , \quad B \text{ est une fonction polynomiale de degré } d.$$
2. *Cas où $\lambda$ est racine simple de $(E_{car})$* Alors $(E)$ possède une solution particulière de la forme :
$$x\longmapsto B(x)\,e^{\lambda x} \quad , \quad B \text{ est une fonction polynomiale de degré } d+1.$$
3. *Cas où $\lambda$ est racine double de $(E_{car})$* Alors $(E)$ possède une solution particulière de la forme :
$$x\longmapsto B(x)\,e^{\lambda x} \quad , \quad B \text{ est une fonction polynomiale de degré } d+2.$$

**C10.52. Exercice** Résoudre les EDLCC2 suivantes.

$$(E_1) \qquad y'' - 2\,y = x^2 + x - 1 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_2) \qquad y'' - 2\,y' = 2x + 1 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_3) \qquad y'' - 4\,y' + 4\,y = (x+1)\,e^{2x} \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_4) \qquad y'' - 2\,y' + y = \sin(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_5) \qquad y'' - 2\,y' + y = \mathrm{ch}(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_6) \qquad y'' - y = 1 + x^2 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_7) \qquad y'' - 9\,y = 6\cos(3x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_8) \qquad y'' - 2\cos(\alpha)\,y' + y = e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_9) \qquad y'' - 2\,y' + a\,y = a\left(x^2 - 1\right) - 4x + 2 \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$(E_{10}) \qquad y'' + 3\,y' + 2\,y = \frac{x-1}{x^2}\,e^{-x} \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\,]0,+\infty[\,,\mathbb{R})$$

**C10.53. Théorème (de Cauchy pour les EDLCC2)** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et l'EDLCC2 :

$$(E) \quad y' + a\,y' + b\,y = f(x) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})\,.$$

Pour tout $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy :

$$(P) \quad \left| \begin{array}{rcll} y' + a(x)\,y & = & b(x) & \\ y(x_0) & = & y_0 & (1^{\text{ère}} \text{ condition initiale}) \\ y'(x_0) & = & y_1 & (2^{\text{ème}} \text{ condition initiale}) \end{array} \right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$ possède une unique solution.

**C10.54. Exercice** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $(P_1) \quad y'' - 3\,y' + 2\,y = -x^2 + x + 2 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. $(P_2) \quad y'' - 4\,y' + 5\,y = 2\cos(x) \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$