CHAPITRE N°7

INÉGALITÉS

C7.1. OBJECTIF Majorer, minorer et encadrer des quantités réelles, à l'aide de techniques élémentaires (sans recours au calcul différentiel).

§ 1 COMPATIBILITÉ DE LA RELATION D'ORDRE SUR $\mathbb{R}$ AVEC LES OPÉRATIONS

C7.2. PROPOSITION (PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA RELATION D'ORDRE $\leqslant$ SUR $\mathbb{R}$)

1. *Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$* $\quad \forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3 \quad x \leqslant y \iff x+a \leqslant y+a$
2. *Compatibilité de $<$ avec $+$* $\quad \forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3 \quad x < y \iff x+a < y+a$
3. *Compatibilité de $\leqslant$ avec $\times$* $\quad \forall (x,y,m) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} (x \leqslant y \text{ et } m \geqslant 0) \implies mx \leqslant my \\ (x \leqslant y \text{ et } m \leqslant 0) \implies mx \geqslant my \end{cases}$
4. *Compatibilité de $<$ avec $\times$* $\quad \forall (x,y,m) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} (x < y \text{ et } m > 0) \iff mx < my \\ (x < y \text{ et } m < 0) \implies mx > my \end{cases}$

C7.3. SIGNE D'UN PRODUIT Soit A et B deux nombres réels.

1. Si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$ alors $AB \geqslant 0$.
2. Si $A \leqslant 0$ et $B \geqslant 0$ alors $AB \leqslant 0$.
3. Si $A \geqslant 0$ et $B \leqslant 0$ alors $AB \leqslant 0$.
4. Si $A \leqslant 0$ et $B \leqslant 0$ alors $AB \geqslant 0$.

En particulier, $A^2 \geqslant 0$ en raisonnant par disjonction de cas suivant le signe de A et en spécialisant $B \longleftarrow A$ dans 1 et 4.

C7.4. OPÉRATIONS MEMBRE-À-MEMBRE SUR DES INÉGALITÉS

1. *Addition membre-à-membre* $\quad \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \quad \begin{cases} (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \implies a+c \leqslant b+d \\ (a \leqslant b \text{ et } c < d) \implies a+c < b+d \end{cases}$
2. *Multiplication membre-à-membre* $\quad \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \quad \begin{cases} (0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d) \implies ac \leqslant bd \\ (0 < a < b \text{ et } 0 < c < d) \implies ac < bd \end{cases}$

§ 2 Sens de variations de quelques fonctions usuelles

C7.5. Définition (monotonie et stricte monotonie d'une fonction) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

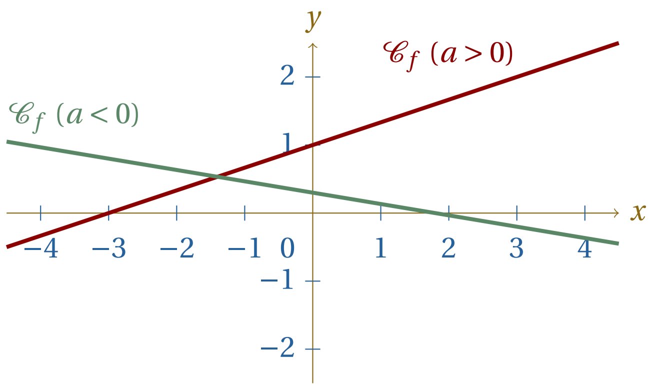
1. La fonction f est croissante sur A si $\boxed{\forall\,(x,y)\in A^2 \qquad x\leqslant y \Longrightarrow f(x)\leqslant f(y)}$
2. La fonction f est décroissante sur A si $\boxed{\forall\,(x,y)\in A^2 \qquad x\leqslant y \Longrightarrow f(x)\geqslant f(y)}$
3. La fonction f est strictement croissante sur A si $\boxed{\forall\,(x,y)\in A^2 \qquad x< y \Longrightarrow f(x)< f(y)}$
4. La fonction f est strictement décroissante sur A si $\boxed{\forall\,(x,y)\in A^2 \qquad x< y \Longrightarrow f(x)> f(y)}$

C7.5.001. Stricte monotonie et équivalence Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

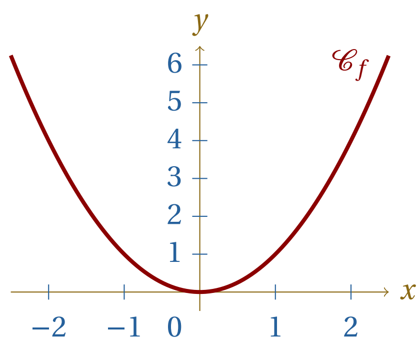
1. Si f est strictement croissante alors :
$$\forall\,(x,y)\in A^2 \qquad x\leqslant y \Longleftrightarrow f(x)\leqslant f(y)\,.$$
2. Si f est strictement décroissante alors :
$$\forall\,(x,y)\in A^2 \qquad x\leqslant y \Longleftrightarrow f(x)\geqslant f(y)\,.$$

Ces équivalences, sous condition de stricte monotonie, sont un outil précieux dans la résolution d'inéquations.

C7.6. Sens de variation d'une fonction affine
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}$. La fonction affine :
$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}\right.$$
est :
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a>0$;
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a<0$.



C7.7. Sens de variation de la fonction carrée
La fonction carrée :
$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$$
est :
- strictement croissante sur $[0,+\infty[$;
- strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.



C7.8. Exercice Donner un encadrement optimal de la quantité $5x-1-6x^2$ pour un réel $x \in [-10, 10]$.

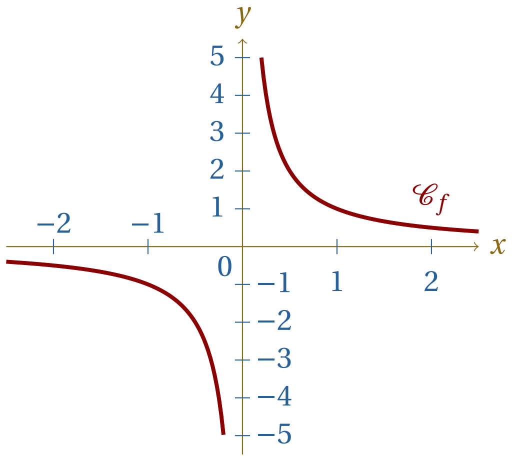
C7.9. Exercice Donner un encadrement optimal de la quantité $x(1-x)$ pour un réel $x \in [0, 1]$.

C7.10. Exercice Résoudre l'inéquation $(x+1)(x-1) > (x+1)^2$.

C7.11. Sens de variation de la fonction inverse

La fonction inverse :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$



est :

- strictement décroissante sur $]0, +\infty[$;
- strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

C7.12. Exercice La fonction inverse définie en C7.17 est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

C7.13. Exercice Déterminer le signe de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - x - 2$.

C7.13.001. Exercice Donner un encadrement optimal de la quantité $2 - \dfrac{1}{x}$ où $x \in [1, +\infty[$.

C7.14. Exercice Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $\dfrac{mx+2}{2x-m} \leqslant 1$.

C7.15. Proposition (encadrement d'un quotient de nombres positifs)

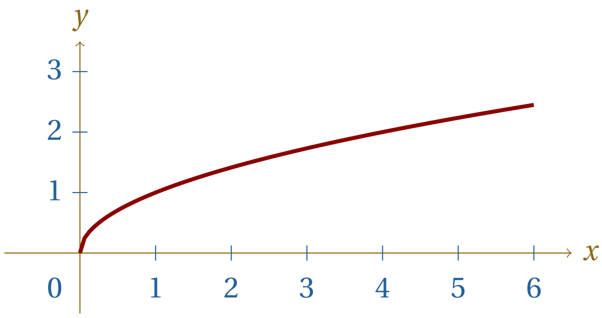
$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2, A, B) \in \mathbb{R}^6 \qquad (0 \leqslant a_1 \leqslant A \leqslant a_2 \text{ et } 0 < b_1 \leqslant B \leqslant b_2) \implies \frac{a_1}{b_2} \leqslant \frac{A}{B} \leqslant \frac{a_2}{b_1}$$

C7.16. Exercice Donner un encadrement optimal de la quantité $\dfrac{2x-1}{2+5x}$ pour un réel $x \in [1, 10]$.

C7.17. Sens de variation de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$



est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

C7.18. EXERCICE Résoudre l'inéquation $x-1 \leqslant \sqrt{x+2}$.

C7.19. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\sqrt{12-x-x^2} \geqslant 5x-1$.

C7.20. EXERCICE Démontrer que la fonction cube :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C7.21. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $x^n + x^2 - 2$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+$.

C7.22. EXERCICE Déterminer le signe de la fonction $f : x \longmapsto x^6 - x^4 - x^3 + x$.

§ 3 INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

C7.23. DÉFINITION (INTERVALLE) Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si :

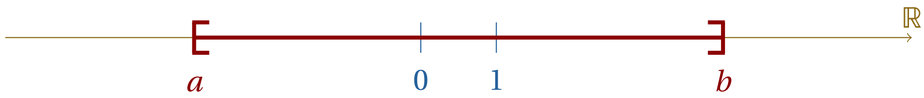
$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad x \leqslant a \leqslant y \implies a \in I\,.}$$

C7.24. EXEMPLE (DIX FORMES D'INTERVALLES) Les parties $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Si a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$ alors, d'après la transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$:

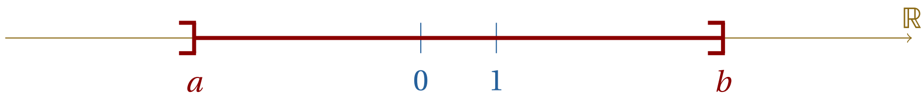
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad \big(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\big) \implies x \leqslant z$$

les 8 parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont également des intervalles.

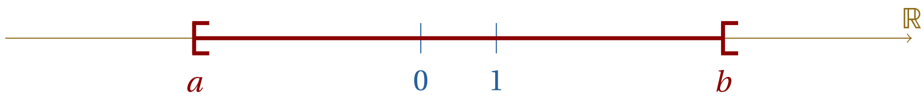
(1) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\}$



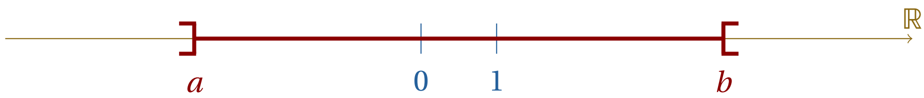
(2) $]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\}$



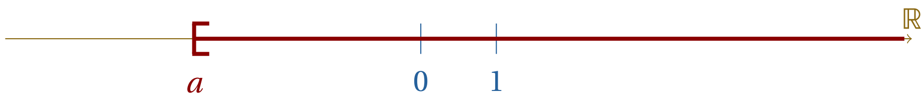
(3) $[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\}$



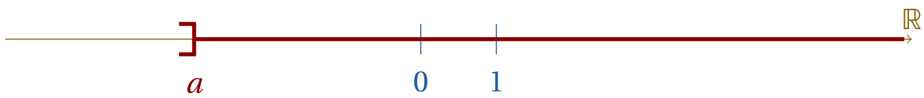
(4) $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$



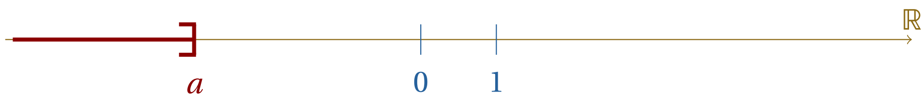
(5) $[a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant a\}$



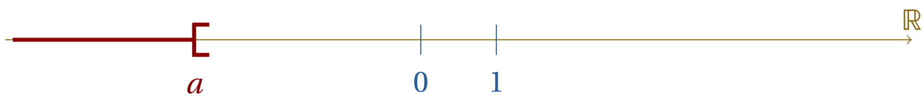
(6) $]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}$



(7) $]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant a\}$



(8) $]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}$



Dans le chapitre « Nombres réels », nous introduirons les concepts de borne inférieure et de borne supérieure grâce auxquels nous pourrons démontrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'une des dix formes listées ci-dessous.

C7.24.001. EXERCICE Justifier que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

C7.25. EXERCICE (INTERSECTION D'INTERVALLES) Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ indexée par un ensemble J. Démontrer que l'intersection $\bigcap_{j\in J} I_j$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

C7.26. EXERCICE (RÉUNION D'INTERVALLES)

1. La réunion de deux intervalles I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$ est-elle un intervalle de $\mathbb{R}$?
2. Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Démontrer que $I_1 \cup I_2$ est un intervalle.
3. Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \cup I_2$ est un intervalle. L'intersection $I_1 \cap I_2$ est-elle nécessairement non vide ?

§ 4 VALEUR ABSOLUE

C7.27. DÉFINITION (VALEUR ABSOLUE D'UN RÉEL)

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |x| := \max\{-x, x\}}$$

C7.28. EXERCICE Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier $\sqrt{x^2} = |x|$.

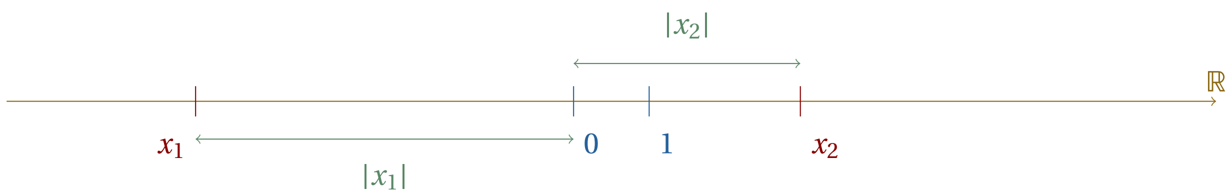
C7.29. EXERCICE Décrire la fonction :

$$\mathrm{sgn} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|} \end{array} \right.$$

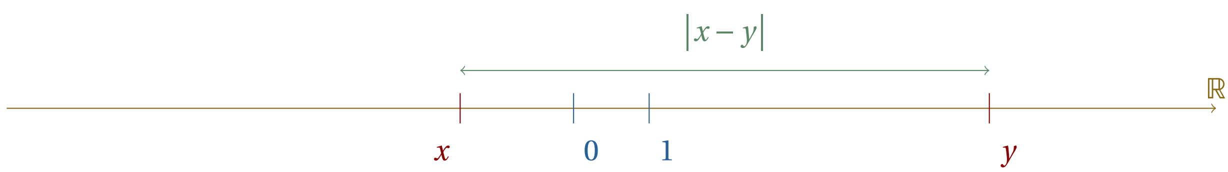
à l'aide d'une phrase et la représenter graphiquement.

C7.30. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA VALEUR ABSOLUE

1. *Valeur absolue d'un réel* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance entre les points 0 et x de la droite réelle.



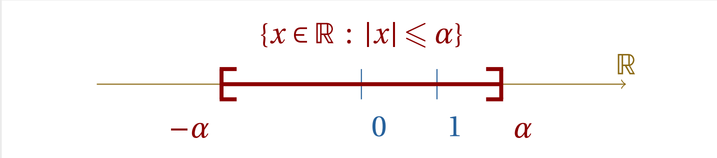
2. *Valeur absolue d'une différence* Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y|$ est la distance entre les points x et y de la droite réelle.



C7.31. Propriété (valeur absolue et inégalités)

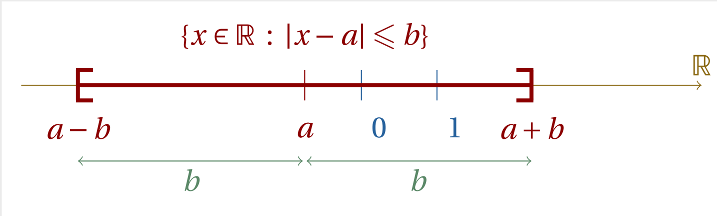
1. *Majoration de la valeur absolue d'un réel* Pour tout $(x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha}$$



2. *Majoration de la valeur absolue d'une différence* Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{|x-a| \leqslant b \iff a-b \leqslant x \leqslant a+b}$$



C7.32. Exercice Déterminer l'ensemble des réels x tels que $|3x-7| \leqslant 5$.

C7.33. Propriétés (de la valeur absolue d'un réel)

1. *Autre expression* $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$
2. *Multiplicativité* $\boxed{\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x \times y| = |x| \times |y|}$
3. *Inégalité triangulaire* $\boxed{\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|}$

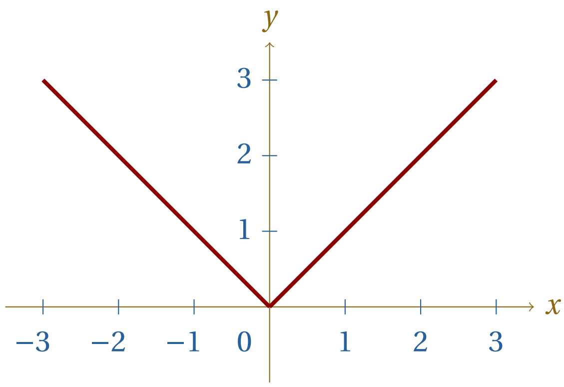
C7.34. Sens de variation de la fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue :

$$|\cdot| \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|\ . \end{array} \right.$$

est :

- strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$;
- strictement croissante sur $]0, +\infty[$.



C7.35. Exercice Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $|x| \leqslant \varepsilon$. Que dire de x ?

C7.36. Exercice Encadrer la quantité $\dfrac{3+2\cos(5x)}{7-3\sin(6x)}$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

C7.37. Exercice Résoudre l'inéquation $|2x-4| \leqslant |x+2|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C7.38. Exercice Résoudre l'équation $|7x+5| = |3x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C7.39. EXERCICE Résoudre l'inéquation $|x-1|+|x+2| \leqslant 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C7.40. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\left|\frac{1}{x}-5\right| \leqslant 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

C7.41. EXERCICE Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-1| \leqslant x^2-x+1$.

C7.42. EXERCICE Résoudre l'équation $|x+12| = \left|x^2-8\right|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C7.43. EXERCICE Tracer la courbe représentative de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |1-2x|-|x-3|+|x| \end{array} \right. .$$

C7.44. EXERCICE Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

C7.45. EXERCICE

1. Comparer, pour tout $x \in [-1,1]$, $|x|$ et x^2.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geqslant \frac{n-\sqrt{2}}{2}$.

§ 5 PROPRIÉTÉ D'ARCHIMÈDE

C7.46. PROPRIÉTÉ (D'ARCHIMÈDE)

$$\boxed{\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists\, N_a \in \mathbb{N} \qquad a \leqslant N_a}$$

C7.47. EXERCICE Démontrer :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_\varepsilon \implies \left|\frac{1}{n}-0\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

§ 6 PARTIES DE $\mathbb{R}$ MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES

C7.48. DÉFINITION Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. La partie A est minorée si :

$$\boxed{\exists\, m \in \mathbb{R} \quad \forall\, a \in A \quad m \leqslant a\,.}$$

Un tel réel m, s'il existe, est appelé un minorant de A.

2. La partie A est majorée si :

$$\boxed{\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, a \in A \quad a \leqslant M\,.}$$

Un tel réel M, s'il existe, est appelé un majorant de A.

3. La partie A est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

C7.49. Proposition (caractérisation des parties bornées) Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si :

$$\boxed{\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, a \in A \quad |a| \leqslant \alpha\,.}$$

C7.50. Exercice La partie $A := \left\{1 - 2x \;:\; x \in \mathbb{R}^+\right\}$ est-elle minorée, majorée, bornée ?

C7.51. Exercice La partie $B := \{\cos(x) + \sin(x) \;:\; x \in \mathbb{R}\}$ est-elle minorée, majorée, bornée ?

C7.52. Exercice La partie $C := \left\{x^2 + 2x \;:\; x \in [-3, +\infty[\right\}$ est-elle minorée, majorée, bornée ?

C7.53. Exercice Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est ni minoré, ni majoré. Démontrer que $I = \mathbb{R}$.

C7.54. Exercice Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer si $A_m := \left\{x^2 + y^2 + mxy \;:\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est minorée, majorée, bornée.

C7.55. Exercice Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$A + B := \{a + b \;:\; (a, b) \in A \times B\}$$

est bornée.

C7.56. Exercice Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$-A := \{-a \;:\; a \in A\}$$

est majorée.

C7.57. Définition Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Un réel m est appelé <u>minimum</u> de A si m est un minorant de A qui appartient à A.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} & m \in A \\ \text{et} & \\ & \forall\, a \in A \quad m \leqslant a\,. \end{array}\right.}$$

   Si A possède un minimum alors il est unique et on le note $\min(A)$.

2. Un réel M est appelé <u>maximum</u> de A si M est un majorant de A qui appartient à A.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} & m \in A \\ \text{et} & \\ & \forall\, a \in A \quad a \leqslant M\,. \end{array}\right.}$$

   Si A possède un maximum alors il est unique et on le note $\max(A)$.

C7.58. Exercice Soit $A :=]-2, 3]$.

1. Justifier que A possède un maximum et le déterminer.
2. Justifier que A est minorée mais ne possède pas de minimum.

C7.59. Exercice Démontrer que $A := \{x^2+2x \,:\, x \in [-1,2]\}$ possède un minimum et un maximum. On précisera les valeurs de $\min(A)$ et $\max(A)$.

C7.60. Exercice Soit $A := \left\{\dfrac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Justifier que A possède un minimum et le déterminer.
2. Justifier que A est majorée mais ne possède pas de maximum.

C7.61. Exercice Soit $A := \left\{\dfrac{n}{nm+1} \,:\, (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Démontrer que A est bornée.
2. Démontrer que la partie A possède un minimum mais pas de maximum.

C7.62. Exercice Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

1. On suppose que B est majorée. Justifier que A est également majorée.
2. On suppose que A et B possèdent un maximum. Comparer $\max(A)$ et $\max(B)$.

C7.63. Exercice Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui possède un minimum et un maximum. Démontrer que la partie :

$$\Delta := \left\{|a_1-a_2| \,:\, (a_1,a_2) \in A^2\right\}$$

possède un un minimum et un maximum. On précisera les valeurs de $\min(\Delta)$ et $\max(\Delta)$ en fonction de $\min(A)$ et $\max(A)$.

§ 7 Propriété du bon ordre dans $(\mathbb{N},\leqslant)$

C7.64. Théorème (principe du bon ordre) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum. On dit encore que l'ensemble ordonné $(\mathbb{N},\leqslant)$ est bien fondé.

C7.65. Théorème Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum.

C7.66. Exercice Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(0)=0$.

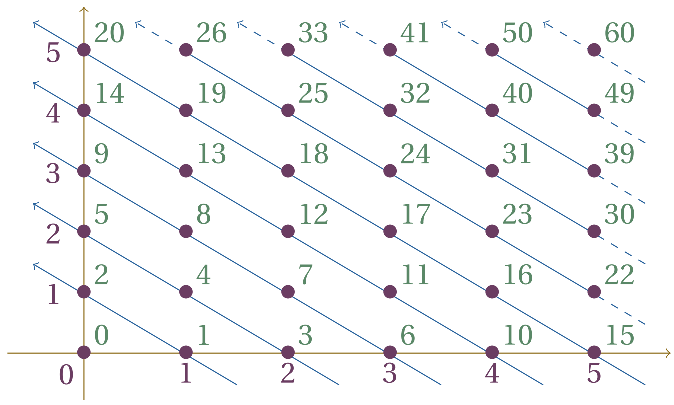
1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.
2. Démontrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists!\, n_x \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n_x) \leqslant x < \varphi(n_x+1)\,.$$

C7.67. Exercice En appliquant le résultat de l'exercice C7.66 à une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi(0)=0$ « bien choisie », démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & b + \displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} k = b + \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} \end{array} \right.$$

est bijective.
Ci-contre, on place la valeur de l'image $f(a,b)$ du couple $(a,b) \in [\![0,5]\!]^2$ à côté du point de coordonnées (a,b).



§ 8 Partie entière d'un réel

C7.68. Propriété-Définition (partie entière) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique n_x tel que :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} n_x \in \mathbb{Z} \\ \text{et} \\ n_x \leqslant x < n_x + 1\,. \end{array}\right.}$$

Cet unique réel n_x est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

C7.69. Exercice Calculer la partie entière des réels 2022, $\frac{23}{11}$, $-1,45$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ où $n \in \mathbb{N}$.

C7.70. Remarque Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor n \rfloor = n$.

C7.71. Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x\,.}$$

C7.72. Exercice (valeur approchée par défaut d'un réel) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$x_n := \frac{\lfloor 10^n\, x \rfloor}{10^n}\,.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} 3 \times 10^k$ et en déduire la valeur de x_n lorsque $x = \frac{1}{3}$.
2. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

C7.73. Propriété

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k}$$

C7.74. Exercice Si $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

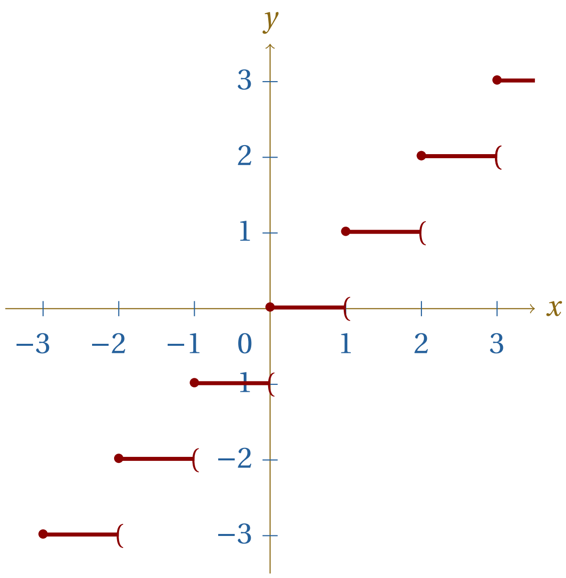
C7.75. Propriétés élémentaire de la fonction partie entière

La fonction partie entière :

$$\lfloor \cdot \rfloor \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor\,. \end{array}\right.$$

est :

- constante par sur chacun des intervalles semi-ouverts $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$;
- croissante sur $\mathbb{R}$;
- continue en tout point $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
- continue à droite en tout point $n \setminus \mathbb{Z}$;
- discontinue à gauche en tout point $n \setminus \mathbb{Z}$;
- admet une limite finie à gauche en tout point de $n \in \mathbb{Z}$, égale à $\lfloor n \rfloor - 1$.



C7.76. EXERCICE Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := 1 - \frac{1}{n}$. Justifier :

$$\lim_{n \to +\infty} \lfloor u_n \rfloor \neq \left\lfloor \lim_{n \to +\infty} u_n \right\rfloor .$$

C7.77. EXERCICE On considère la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array} \right. .$$

1. Justifier que la fonction f est 1-périodique.
2. Préciser, pour tout $x \in [0, 1[$, la valeur de $f(x)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

C7.78. EXERCICE

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Démontrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, (q_x, r_x) \in \mathbb{Z} \times [0, \alpha[\qquad x = q_x\, \alpha + r_x\, .$$

2. Soient x et y des nombres réels tels que $x < y$. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.
   Indication : On pourra introduire un entier naturel non nul q tel que $\frac{1}{q} < y - x$ en justifiant son existence.

C7.79. EXERCICE Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que : $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a + b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.