Introduction à la théorie des jeux et ses applications aux communications sans fils

E. Veronica Belmega

ETIS , UMR 8051, Université Paris Seine, Université Cergy-Pontoise, ENSEA, CNRS, France

21 novembre 2017
Lycée Chrestien de Troyes

I. Introduction et présentation

2002 – 2007	**Diplôme d'ingénieur** Automatique, contrôle et informatique	Université *Politehnica* de Bucarest Bucarest, Roumanie
2005 – 2006	**Programme d'échange international Socrates/Erasmus** Mathématiques appliquées	École Polytechnique Palaiseau, France
2006 – 2007	**M2R - Master de recherche** Communications, traitement du signal et des images	Université Paris-Sud 11 Orsay, France
2007 – 2010	**Ph.D. - Doctorat** Communications sans fils **Bourse l'Oréal - UNESCO - Académie des Sciences**, "Pour les femmes et la science"	Laboratoire des signaux et systèmes, Supélec Gif-sur-Yvette, France
2010 – 2011	**Post-doctorat** Communications sans fils	Université de Princeton Princeton, États-Unis Chaire Alcatel-Lucent en radio flexible, Supélec Gif-sur-Yvette, France

2011 – présent	**Maître de conférences** **Enseignement** : informatique, communications **Recherche** : optimisation, théorie des jeux, apprentissage appliqués en communications	ENSEA - École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications Cergy-Pontoise, France ETIS - Équipes Traitement de l'Information et Systèmes UMR CNRS
2015 – 2017	**Délégation recherche** optimisation en ligne, minimisation du regret	Inria Grenoble Rhône-Alpes Grenoble, France

École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications

École d'ingénieurs généraliste
à Cergy-Pontoise (95)

- Web : **ensea.fr**
- Wiki ENSEA
- Vidéos présentation : YouTube

Prix Concours Ingénieuses'17 de la CDEFI

CDEFI - Conférence des directeurs des écoles françaises d'ingénieurs

L'ENSEA - double lauréat 2017

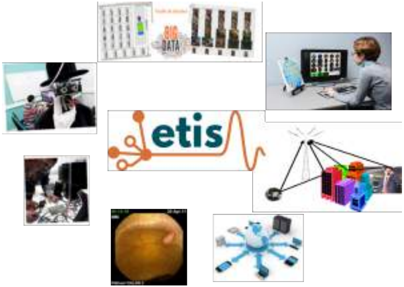
- **Enseignement de l'égalité F/H** : *Osez l'égalité femmes-hommes au sein d'une école d'ingénieurs*
- **Élève ingénieure** : Iris Moulin

Équipes Traitement de l'Information et Systèmes

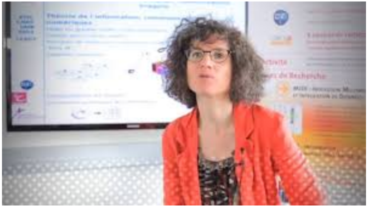
Tutelles : ENSEA, Université de Cergy-Pontoise, CNRS

Quatre équipes de recherche

- **MIDI** : Indexation multimédia et intégration de données
- **ASTRE** : Architectures, systèmes, technologies pour les unités reconfigurables embarquées
- **Neurocybérnetique**
- **ICI** : Information, communication, imagerie



ICI et les télécom *girls*



- **Thématiques recherche**
  - Imagerie
  - Communications numériques : codage, théorie de l'information, sécurité, allocation de ressources
- **Parité F/H permanents respectée!**

I. Fijalkow, "Les Telecom-Girls d'ETIS : à la pointe de la recherche!", http://www.cge-news.com/main.php?p=1119

II. Introduction à la théorie des jeux

Théorie des jeux

Théorie des jeux : domaine des mathématiques qui étudie l'**interaction stratégique** entre plusieurs joueurs (preneurs de décision) rationnels, sous l'hypothèse que les choix et les bénéfices d'un joueur dépendent des décisions des autres joueurs.

Deux branches

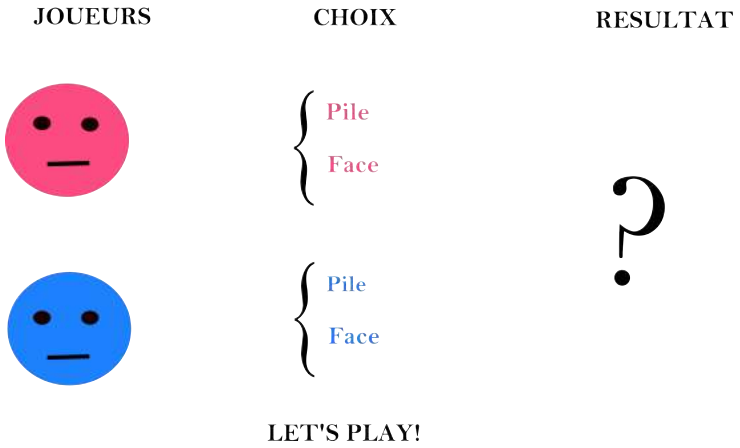
- **Jeux non-coopératifs** : chaque joueur choisit ses propres actions indépendamment des autres et afin de maximiser son bénéfice individuel
- **Jeux coopératifs** : les joueurs coopèrent en afin de renforcer leur positions

J. von Neumann, O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, 1944.
Le Caravage, "Les Tricheurs", 1594-1595.
D. Fudenberg, J. Tirole, "Game Theory", MIT Press, 1991.

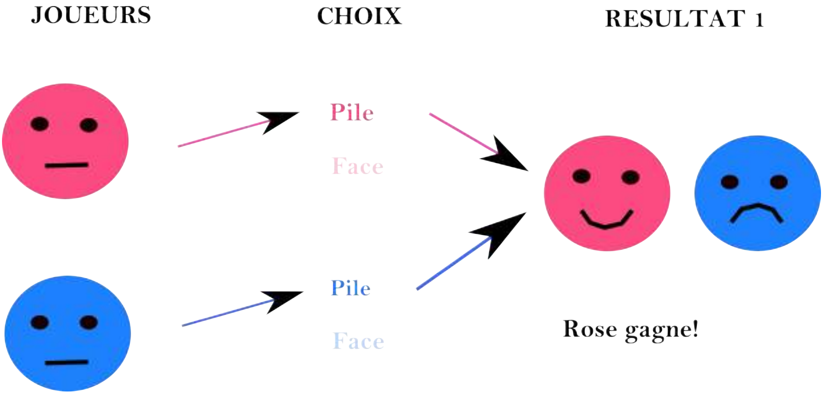
Pile ou Face

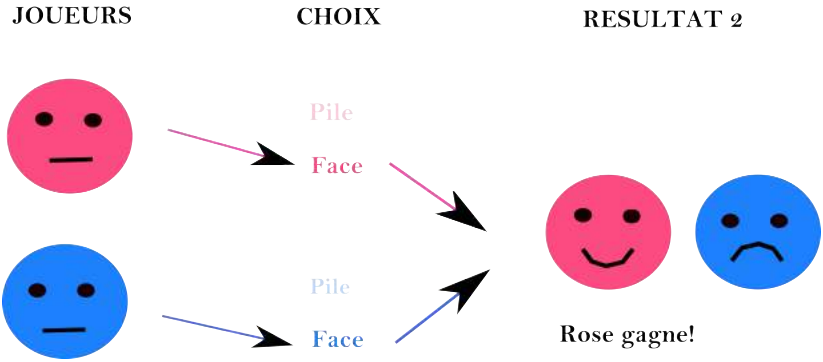
Exemple de jeu classique 2×2

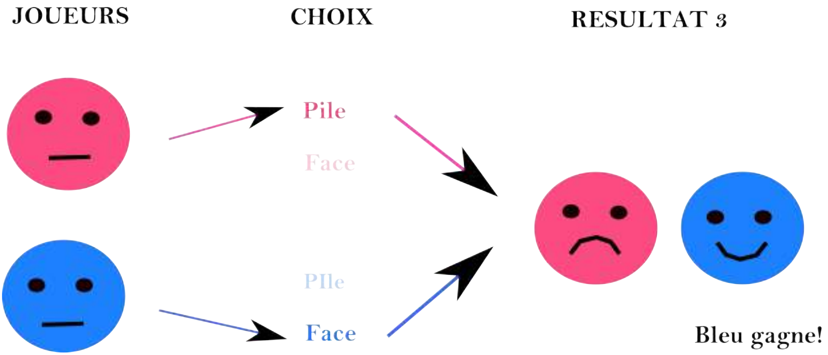
- Deux joueurs
- Chaque joueur dispose de deux choix : *Pile* ou *Face*
- *Règles du jeu:*
  - Choix simultanés (en temps)
  - Joueur 1 gagne si les choix sont identiques
  - Joueur 2 gagne si les choix sont différents
- Joueurs en opposition : si un joueur gagne la partie, l'autre joueur perd

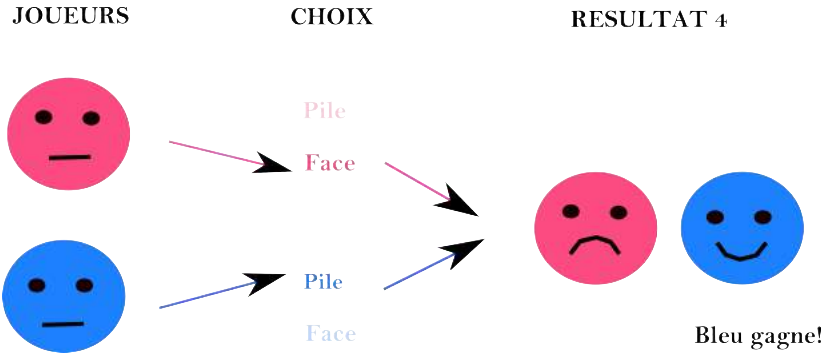


Qu. Combien d'issues possibles en fonction des choix des joueurs?


JOUEURS
CHOIX
RESULTAT 1
Pile
Face
Pile
Face
Rose gagne!


JOUEURS
CHOIX
RESULTAT 2
Pile
Face
Pile
Face
Rose gagne!


JOUEURS
CHOIX
RESULTAT 3
Pile
Face
PIle
Face
Bleu gagne!



L'issue du jeu et le bénéfice de chaque joueur depend non seulement de son choix mais aussi du choix de l'autre joueur.

Définition formelle

Un jeu non-coopératif est défini par trois composantes : $\mathcal{G} = \left(\mathcal{K}, \{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^K, \{u_k\}_{k=1}^K\right)$

- **Joueurs** : $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$
- **Actions** : $\forall\, k \in \mathcal{K}, \mathcal{A}_k$ est l'ensemble des choix possibles $a_k \in \mathcal{A}_k$ du joueur k

  Notations

  Profile d'actions $a \triangleq (a_1, \ldots, a_K) \in \mathcal{A}$

  $$\mathcal{A} \triangleq \prod_{j=1}^{K} \mathcal{A}_j$$

  $a_{-k} \triangleq (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_K) \in \mathcal{A}_{-k} \triangleq \prod_{\ell \neq k} \mathcal{A}_\ell$ actions des autres joueurs

- **Utilités** : $\forall\, k \in \mathcal{K}, u_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, s.t. $u_k(a_k, a_{-k})$ mesure le gain ou le benefice du joueur k

Optimisation vs. Jeux

Optimisation

- Un seul agent intelligent : $K = 1$
- Contrôle global des actions
- Objectif unique : trouver le meilleur choix qui maximise le bénéfice

$$\max_{a_1 \in \mathcal{A}_1} u_1(a_1)$$

Jeux - interactions stratégiques

- Plusieurs agents intelligents, joueurs
- Pas de contrôle global des actions
- Multiples objectifs : chaque joueur choisit l'action qui maximise son propre bénéfice, **sachant que les autres font pareil**

$$\begin{cases} \max_{a_k \in \mathcal{A}_k} u_k(a_k, a^*_{-k}) \\ \text{s.t.} \\ a^*_{-k} = \arg \max_{a_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}} u_{-k}(a_k, a_{-k}) \end{cases}$$

Dilemme du prisonnier

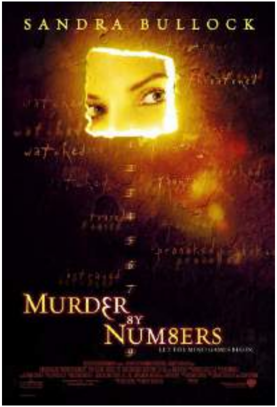
Règles du jeu:

- Deux suspects sont retenus dans des cellules différentes et ne peuvent pas communiquer pour coordonner leur actions.
- Si les deux se taisent, ils feront seulement un an de prison (manque de preuves).
- Si les deux avouent, ils feront cinq ans de prison.
- Si seulement un des suspects parle, il sera libéré (collaboration avec la police) et l'autre condamné à vingt ans de prison.

Qu. Est-ce que l'on peut prédire l'issue de ce jeu sous l'hypothèse de rationalité et avec une connaissance parfaite des règles du jeu?

Dilemme du prisonnier en film

- Thriller *"Murder by numbers"* - "Calculs meurtriers", Barbet Schroeder, 2002.



http://www.youtube.com/watch?v=duaOvmc6XE8

Matrice du jeu

- Synthèse du jeu
- Permet d'analyser et prédire l'issue du jeu

		Prisonnier 2	
		Se taire	Avouer
Prisonnier 1	Se taire	(-1, -1)	(-20, 0)
	Avouer	(0, -20)	(-5, -5)

Choix du prisonnier 1

Prisonnier 1 \ Prisonnier 2	Se taire	Avouer
Se taire	(-1, -1)	(-20, 0)
Avouer	(0, -20)	(-5, -5)

Choix rationnel du prisonnier 1 : **"Avouer"** toujours, indépendamment du choix de l'autre prisonnier

Choix du prisonnier 2

Prisonnier 2

Prisonnier 1	Se taire	Avouer
Se taire	(-1, -1)	(-20, 0)
Avouer	(0, -20)	(-5, -5)

Choix rationnel du prisonnier 2 : **"Avouer"** toujours, indépendamment du choix de l'autre prisonnier

Issue du jeu

Prisonnier 1 \ Prisonnier 2	Se taire	Avouer
Se taire	(-1, -1)	(-20, 0)
Avouer	(0, -20)	(-5, -5)

Équilibre de Nash (EN) : (**"Avouer"**, **"Avouer"**)

- En absence de communication, les deux joueurs choisissent **"Avouer"**
- Les deux joueurs gaineraient en choisissant **"Se Taire"**
- Aucun des joueurs ne peut dévier unilatéralement

Équilibre de Nash

- Prédictions *cohérentes* de comment le jeu va être joué
- Un état stable aux déviations unilatérales
- L'action de chaque joueur représente le meilleur choix, étant donnés les choix des autres joueurs

Définition

Un profile $a^* \in \mathcal{A}$ est un équilibre de Nash en strategies pures si pour tout joueur $k \in \mathcal{K}$ et pour toute action $s_k \in \mathcal{A}_k$:

$$u_k(a_k^*, a_{-k}^*) \geq u_k(s_k, a_{-k}^*).$$

$K = 1$: l'équilibre de Nash est la solution globale du problème d'optimisation

John F. Nash, "Equilibrium points in N-persons games", Proc. of National Academy of Science, vol. 36, pp. 48-49, 1950.
John F. Nash, "Non-cooperative games", Annals of Mathematics, vol. 54, no. 2, pp. 286-295, Sept. 1951.

John F. Nash (1928 - 2015)

- Ph.D. *"Non-cooperative games"*, Princeton University, pp.1–28, 1950
- **Prix de théorie John von Neumann 1978** : équilibres non-coopératifs
- **Prix Nobel d'économie 1994** : théorie des jeux
- **Prix Abel 2015** : théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires et ses applications à l'analyse géométrique
- Film biographique *"A beautiful mind"* - "Un homme d'exception", by Ron Howard, 2001, 4 Prix Oscar

http://www.youtube.com/watch?v=2d_dtTZQyUM

Est-ce que l'équilibre de Nash est un état desirable?

- Optimalité sociale
  - L'optimum social : profile qui maximise la somme des bénéfices des joueurs
  - Dilemme du prisonnier : (**"Se taire"**, **"Se taire"**)
- Optimalité de Pareto
  - Amelioration de Pareto : changement d'un profile vers un autre qui améliore le benefice d'au moins un des joueurs
  - Profile Pareto optimal : profile qui ne permet pas une amelioration de Pareto sans decroitre le benefice d'au moins un des joueurs
  - Dilemme du prisonnier : (**"Se taire"**, **"Se taire"**), (**"Avouer"**, **"Se taire"**), (**"Se taire"**, **"Avouer"**)

En general, l'EN n'est pas un état d'optimum social ni un profile Pareto optimal.

Est-ce que l'on peut faire mieux?

L'équilibre de Nash est une solution d'une interaction stratégique entre joueurs égoïstes

Hypothèses :

- Les joueurs sont **rationnels**
- Les joueurs interagissent **une unique fois**
- Les joueurs **ne peuvent pas communiquer**
- Les joueurs ont une **connaissance parfaite** et globale du jeu

"Repetition enables cooperation" – Robert Y. Aumann

- Dilemme du prisonnier répété : l'optimum social (**"Se taire"**, **"Se taire"**) peut être atteint
- Stratégie optimale : *Tit-for-Tat*

  Iteration 1 : coopérer, **"Se taire"**
  Iteration n : jouer la stratégie de l'adversaire à l'iteration $n-1$

- Jeu en ligne par Nicky Case
  http://ncase.me/trust//

R. J. Aumann, and S. Sorin, "Cooperation and bounded recall", Games and Economic Behavior, vol. 1, no. 1, pp. 5-39, 1989.
R. Axelrod, "The evolution of strategies in the iterated prisoner's dilemma", The dynamics of norms, pp. 1-16, 1987.

Dilemme du prisonnier avec communication

- Jeu TV *Golden Balls* : version modifiée du Dilemme du prisonnier
- C la somme d'argent de la finale
- Les finalistes ont 30 secondes pour communiquer avant de choisir leur action
- Plusieurs EN : (**"Voler"**, **"Voler"**), (**"Voler"**, **"Partager"**), (**"Partager"**, **"Voler"**)
  $\Longrightarrow$ **prediction difficile!**

Joueur 2

Joueur 1	Partager	Voler
Partager	(C/2, C/2)	(0, C)
Voler	(C, 0)	(0, 0)

Dilemme du prisonnier avec communication

- Jeu TV *Golden Balls* : version modifiée du Dilemme du prisonnier
- C la somme d'argent de la finale
- Les finalistes ont 30 secondes pour communiquer avant de choisir leur action
- Plusieurs EN : (**"Voler"**, **"Voler"**), (**"Voler"**, **"Partager"**), (**"Partager"**, **"Voler"**)
  $\Longrightarrow$ **prediction difficile!**

Joueur 2

Joueur 1	Partager	Voler
Partager	(C/2, C/2)	(0, C)
Voler	(C, 0)	(0, 0)

- (**"Partager"**, **"Partager"**) peut être une issue du jeu meme si ce n'est pas un EN ?!

  http://www.youtube.com/watch?v=S0qjK3TWZE8

Est-ce que l'EN existe toujours?

Pile ou Face $\equiv$ Penalty

Attaquant

Guardien	Gauche	Droite
Gauche	(+1, -1)	(-1, +1)
Droite	(-1, +1)	(+1, -1)

Pas d'EN en stratégies pures!
Idée : introduire de l'aléa!

- Stratégies mixtes :
  $\sigma_1 = (p_1, p_2)$, $\sigma_2 = (q_1, q_2)$
  pour tout $i, j \in \{1, 2\}$,

  $p_i \geq 0$, $q_j \geq 0$ et

  $$\begin{cases} p_1 + p_2 & = & 1 \\ q_1 + q_2 & = & 1, \end{cases}$$

- Ensemble des actions modifié : $\mathcal{S}_k$ est compacte et convexe

- Utilité modifiée :

  $$\overline{u}_k(\sigma_k, \sigma_{-k}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} u_k(x_i, y_j) p_i q_j,$$

  fonction multi-lineaire

Nash et la Topologie algébrique

Théorème

Tout jeu discret fini $\mathcal{G} = \left(\mathcal{K}, \{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^{K}, \{u_k\}_{k=1}^{K}\right)$ *a au moins un équilibre de Nash en strategies mixtes.*

- Preuve par John F. Nash
- Alternatives basées sur des théorèmes de point fixe : théorème de Kakutani, théorème de Brower
- σ^* est un EN ssi σ^* est un point fixe de la correspondence des meilleures réponses, i.e., $\sigma^* \in \mathrm{BR}(\sigma^*)$

$$\begin{aligned} \mathrm{BR}_k(\sigma_k, \sigma_{-k}) &= \{\tau_k \in \mathcal{S}_k : \overline{u}_k(\tau_k, \sigma_{-k}) \geq \overline{u}_k(\varepsilon_k, \sigma_{-k}), \forall \varepsilon_k \in \mathcal{S}_k\} \\ \mathrm{BR}(\sigma) &= \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathrm{BR}_k(\sigma) \end{aligned}$$

J. Nash, "Equilibrium points in N-persons games", Proc. of National Academy of Science, vol. 36, pp. 48-49, 1950.

J. Nash, "Non-cooperative games", Annals of Mathematics, vol. 54, no. 2, pp. 286-295, Sept. 1951.

Principe d'indifference de Von Neumann

Qu. Comment trouver un EN en stratégies mixtes?

- Chaque joueur choisit sa stratégie mixte afin de rendre les autres joueurs indifférents entre leur actions pures
- Les joueurs n'ont aucune raison de préférer une action pure en particulier

$$\begin{cases} (-1)p_1 + (+1)p_2 & = & (+1)p_1 + (-1)p_2, & \text{attaquant indifferent entre "Gauche" et "Droite"} \\ (+1)q_1 + (-1)q_2 & = & (-1)q_1 + (+1)q_2, & \text{guardien indifferent entre "Gauche" et "Droite"} \\ p_1 + p_2 & = & 1, & \\ q_1 + q_2 & = & 1. & \end{cases}$$

- La solution est : $\sigma_1^* = (p_1^*, p_2^*) = (0.5, 0.5)$, $\sigma_2^* = (q_1^*, q_2^*) = (0.5, 0.5)$
utilités symétriques

J. von Neumann, O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, 1944.

Chifoumi

Joueur 2

Joueur 1

	Pierre	Feuille	Cisseaux
Pierre	(0, 0)	(-1, +1)	(+1, -1)
Feuille	(+1, -1)	(0, 0)	(-1, +1)
Ciseaux	(-1, +1)	(+1, -1)	(0, 0)

- Pas d'EN en stratégies pures
- EN en stratégies mixtes : $(1/3, 1/3, 1/3); (1/3, 1/3, 1/3)$
- Choisir une valeur aléatoire uniformément distribuée : **très difficile pour les humains!!!**
- Algorithmes d'apprentissage qui apprennent à prédire vos coups
  http://www.cs.stir.ac.uk/˜kms/schools/rps/index.php
  http://www.essentially.net/rsp/play.jsp

Critiques de l'équilibre de Nash

- Sous-optimalité dans les jeux à un coup
  - Techniques de pricing : tarification incitative
  - Jeux dynamiques, jeux répétés : Robert Y. Aumann
  - Jeux cooperatives : jeux de coalitions, Nash *bargaining*
- Connaissance parfaite du jeu
  - Jeux avec information incomplète
  - Jeux avec information imparfaite
  - Approche unifiée par John C. Harsanyi (jeux bayesiens)
- Multiplicité des EN
  - Issues non-predictibles : les joueurs n'ont aucune raison de croire qu'un EN en particulier sera l'issue du jeu
  - Selection de l'equilibre : John C. Harsanyi, Reinhard Selten
  - NE est point d'équilibre dans des systèmes dynamiques, multi-agent
- Rationalité des joueurs
  - Hierarchies des croyances : Robert Y. Aumann, croyances sur les croyances sur les croyances ... sur les stratégies des autres joueurs sont prises en compte à la decision

III. Communications sans fils : problèmes d'allocation de ressources

Objectifs des communications

Connecting people & objects

Transmission - via un réseau - de l'information d'une manière fiable, efficace et sécurisée!

- Fiabilité : l'information transmise est correctement décodée au récepteur
- Efficacité : très hauts débits binaires, compression des données (implications en stockage), efficacité énergétique
- Sécurité : robustesse au *jamming*, l'information ne peut être déchiffrée par une entité malveillante
- Interconnexion : acheminement de l'information via un réseau (e.g., 5G, Internet, DVB-T)

Communications sans fils : historique





1G : 1980

- Communications analogiques
- Voix

2G : 1990 - standard GSM

- Communications numériques
- Débits 50-500 kbits/s
- + SMS, MMS

3G : 2000 - standards UMTS, CDMA2000

- Hauts débits 2-42 Mbits/s
- + Internet mobile, data (vidéo, photos), vidéoconférences, visiophonie

4G : 2010 - standards LTE, WiMax

- Trés hauts débits 100 Mbits/s - 1Gbits/s

Communications sans fils : historique

1G : 1980

- Communications analogiques
- Voix

2G : 1990 - standard GSM

- Communications numériques
- Débits 50-500 kbits/s
- + SMS, MMS

3G : 2000 - standards UMTS, CDMA2000

- Hauts débits 2-42 Mbits/s
- + Internet mobile, data (vidéo, photos), vidéoconférences, visiophonie

4G : 2010 - standards LTE, WiMax

- Trés hauts débits 100 Mbits/s - 1Gbits/s

5G : 2020 - en cours

- Débits prévus 100 - 1000 $\times$ 4G
- Efficacité énergétique 100 $\times$ 4G
- + IoT, réalité augmentée/virtuelle

Théorie des jeux et communications

- Transmission robuste : canal ou environnement de communication hostile

B. Mandelbrot, "Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication", Institut Henri Poincaré, Ph.D. dissertation, 1952.

N. M. Blachman, "Communication as a game", in Proc. WESCON Conf., pp. 61-66, Aug. **1957**.

D. P. Palomar, J. M. Cioffi, and M. A. Lagunas, "Uniform Power Allocation in MIMO Channels: A Game-Theoretic Approach," IEEE Trans. on Information Theory, vol. 49, no. 7, pp. 1707-1727, July **2003**.

- Optimisation de l'allocation de ressources dans les réseaux sans fils

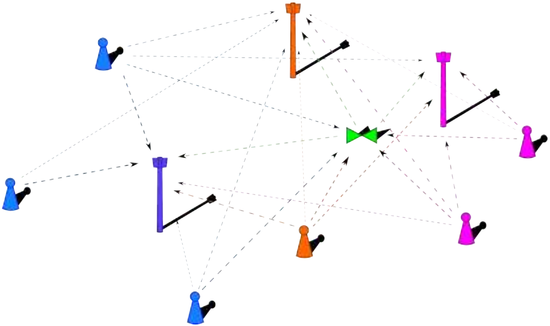
T. Alpcan, T. Basar, R. Srikant, and E. Altman, "CDMA uplink power control as a noncooperative game," Springer Wireless Networks Journal, vol. 8, pp. 659–670, Nov. **2002**.

Gesualdo Scutari, Daniel P. Palomar, and Sergio Barbarossa, "Optimal Linear Precoding Strategies for Wideband Noncooperative Systems Based on Game Theory – Part I: Nash Equilibria," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 56, no. 3, pp. 1230-1249, March **2008**.

E.V. Belmega, S. Lasaulce, and M. Debbah, "Power allocation games for MIMO multiple access channels with coordination", IEEE Trans. on Wireless Communications, vol. 8, no. 6, pp. 3182–3192, Jun. **2009**.

P. Mertikopoulos, E.V. Belmega, A. Moustakas, and S. Lasaulce, "Distributed Learning Policies for Power Allocation in Multiple Access Channels", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 30, no.1, pp. 96-106, Jan. **2012**.

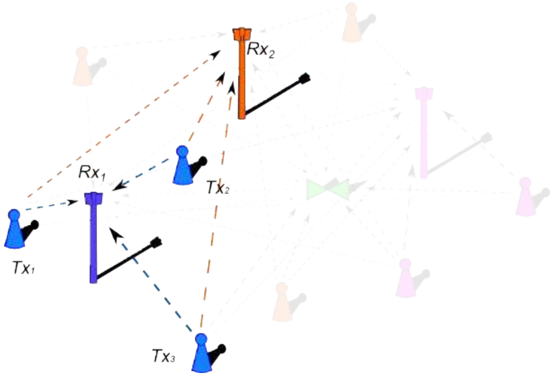
Réseaux sans fils distribués



- Ressources limitées $\rightarrow$ besoin de résoudre des problèmes d'allocation
- Politiques d'allocation distribuées peuvent être préférables aux politiques centralisées
- Objectif : developper des réseaux flexibles, autonomes, auto-optimisantes

- L'interférence mutuelle introduit l'interaction entre les utilisateurs $\Longrightarrow$ théorie des jeux

Example simple



Canal à accès multiple (MAC)

- $A \geq 2$ stations de base qui opèrent dans des bandes de fréquence orthogonales
- $K \geq 2$ utilisateurs avec puissance d'émission limitée

Qu. Quelle est l'allocation de puissance optimale de chaque utilisateur autonome par rapport à son débit individuel?

L'allocation de puissance via la théorie des jeux

Jeu non-coopératif : $\mathcal{G}_{\mathrm{MAC}} = \left(\mathcal{K}, \{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{K}, \{u_k\}_{k=1}^{K}\right)$

- Joueurs : utilisateurs $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$
- Actions : $\forall\, k \in \mathcal{K}, \mathcal{P}_k$ est l'ensemble des allocations de puissance vers les stations de base $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{P}_k = \left\{ p_k \in \mathbb{R}^A : p_{k\alpha} \geq 0 \text{ and } \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} p_{k\alpha} = \overline{P}_k \right\}.$$

- Utilité : $\forall\, k \in \mathcal{K}, u_k : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$, s.t. $u_k(p_k, p_{-k})$ est la capacité de Shannon (débit maximal de communication)

$$u_k(p_k, p_{-k}) = \sum_{\alpha} \log\left(1 + \mathrm{sinr}_{k\alpha}(p_k, p_{-k})\right)$$

$$\mathrm{sinr}_{k\alpha}(p_k, p_{-k}) = \frac{g_{k\alpha} p_{k\alpha}}{\sigma_\alpha^2 + \sum_{\ell \neq k} g_{\ell\alpha} p_{\ell\alpha}}$$

C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise" Proceedings of the IRE, vol. 37, no 1, pp. 10-21, 1949.

L'équilibre de Nash

Théorème

Le jeu non-coopératif $\mathcal{G}_{\text{MAC}} = \left(\mathcal{K}, \{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{K}, \{u_k\}_{k=1}^{K}\right)$ *a toujours un équilibre de Nash unique.*

- Existence de l'EN via théorème de point fixe

  Ensemble d'action : $\mathcal{P}_k$ compacte et convexe

  Fonction d'utilité : $u_k(a_k, a_{-k})$ continues en (a_k, a_{-k}) et concave en a_k

- Unicité de l'EN : en définissant une fonction de potentiel et via outils d'optimisation convexe

J. B. Rosen, "Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games", Econometrica, vol. 33, no. 3, pp. 520-534, 1965.
P. Mertikopoulos, E.V. Belmega, A. Moustakas and S. Lasaulce, "Power Allocation Games in Parallel Multiple Access Channels", VALUETOOLS, ENS Cachan, France, May 2011.

Algorithme d'apprentissage

Qu. Comment les utilisateurs peuvent atteindre l'EN d'une manière distribuée?

- Dynamique du replicateur : algorithme d'apprentissage par renforcement de la théorie des jeux evolutionnaires

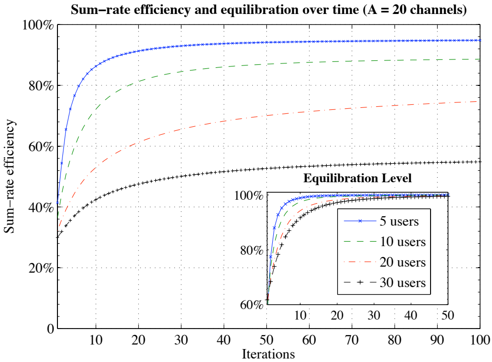
$$\frac{dp_{k\alpha}}{dt} = p_{k\alpha}(t)\left[v_{k\alpha}(p(t)) - \overline{P}_k^{-1}\sum_{\beta} p_{k\beta}v_{k\beta}(p)\right],$$

où $v_{k\alpha}$ est l'utilité marginale qui permet d'améliorer le débit

$$v_{k\alpha} = \frac{\partial u_k}{\partial p_{k\alpha}} = \frac{g_{k\alpha}}{1 + \sum_{\ell} g_{\ell\alpha}p_{\ell\alpha}}.$$

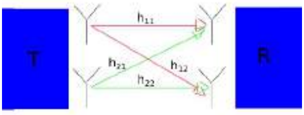
- Convergence exponentielle vers l'unique EN

J. W. Weibull, "Evolutionary game theory" MIT press, 1997.
P. Mertikopoulos, E.V. Belmega, A. Moustakas and S. Lasaulce, "Power Allocation Games in Parallel Multiple Access Channels", VALUETOOLS, ENS Cachan, France, May 2011.



- Convergence rapide vers l'EN
- L'EN est sous-optimal par rapport à l'optimum social
- Information nécessaire aux utilisateurs : leurs propres canaux, $\sum_{\ell} g_{\ell\alpha} p_{\ell\alpha}$ l'interference globale

Canal à access multiple multi-antennes (MIMO)



- Dispositifs équipés des multiples antennes
- Extension non-triviale du cas mono-antenne

- Ensemble des stratégies de l'utilisateur k : spectahedre, i.e., le cône des matrices semi-définies positives de trace constante

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ \mathbf{Q}_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k} : \mathbf{Q}_k \succeq 0, \mathrm{Trace}(\mathbf{Q}_k) = \overline{P}_k \right\}$$

- Fonction d'utilité :

$$u_k(\mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_{-k}) = \log\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_k^\dagger + \sum_{\ell \neq k} \mathbf{H}_\ell \mathbf{Q}_\ell \mathbf{H}_\ell^\dagger\right) - \log\det\left(\mathbf{I} + \sum_{\ell \neq k} \mathbf{H}_\ell \mathbf{Q}_\ell \mathbf{H}_\ell^\dagger\right)$$

- Existence d'au moins un EN, algorithme d'apprentissage
- **Problème ouvert** : prouver l'unicité de l'EN ...

P. Mertikopoulos, E.V. Belmega, and A. Moustakas, "Matrix Exponential Learning: Distributed Optimization in MIMO systems", IEEE ISIT, Jun. 2012.

Ma recherche et mes publications scientifiques

- Page web : **https://sites.google.com/site/evbelmega/**

IV. Autres videos YouTube sur les jeux

Jeux vidéo!

- *Merci Dorian!* sur l'équilibrage dans les jeux vidéo multi-joueurs par Dorian, Dec. 2013

  http://www.nesblog.com/mode-sans-echec/

The evolution of trust avec Squeezie

- *La vidéo pas drôle mais intéressante*, par Squeezie, 3.9 M vues, Sep. 2017

  https://www.youtube.com/watch?v=6xqPKUx1WOI